PODSTAWY TEORII LICZB – ZADANIA
ZESTAW NR.5 – UŁAMKI ŁAŃCUCHOWE

Zad.1 Udowodnij, że dla $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor.$$

Zad.2 Sprawdź następujące rozwinięcia liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe:

(a) $\sqrt{n^2+1} = [n; \overline{2n}]$

(b) $\sqrt{n^2+2} = [n; \overline{n, 2n}]$

(c) $\sqrt{n^2-1} = [n-1; \overline{1, 2n-2}]$

(a) $\sqrt{n^2-2} = [n-1; \overline{1, n-2, 1, 2n-2}]$

Zad.3 Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$x^2 + 3y^2 = 1998x.$$

Zad.4 Sprawdź, że jeśli

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

to

$$\begin{array}{rrcl} (a) & a_1 & = & \dfrac{P_n}{P_n - 1} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0]\,, \\ (b) & b_1 & = & \dfrac{Q_n}{Q_n - 1} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1]\,. \end{array}$$

Zad.5 Rozwiąż następujące równania (liniowe diofantyczne) stosując metodę reduktów

$$\begin{array}{rrcl} (a) & 43x + 5y & = & 1, \\ (b) & 18x + 3y & = & 24. \end{array}$$

Zad.6 Udowodnij, że jeśli a i b są liczbami wymiernymi, takimi że $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ jest liczbą wymierną, to są one sześcianami liczb wymiernych.

Zad.7 Udowodnij, że jeżeli a, b i c są różnymi liczbami wymiernymi to wyrażenie

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2}$$

jest kwadratem liczby wymiernej.