



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Publikacja opracowana podczas realizacji projektu „Plan Rozwoju Politechniki Częstochowskiej”
współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

MECHANIKA PŁYNÓW

(dla kierunku „Mechatronika”)

STANISŁAW DROBNIAK

Grudzień 2008

SPIS TREŚCI

	str.
1. Podstawowe pojęcia mechaniki płynów	4
1.1. Mechanika ciała stałego a mechanika płynów	4
1.2.. Płyn jako ośrodek ciągły	10
1.3. Ciśnienie w płynie jako wielkość skalarna	12
2. Podstawy kinematyki płynów	15
2.1. Metoda Lagrange’a opisu ruchu płynu	15
2.2. Eulerowski opis ruchu płynu	17
2.3. Trajektorie, linie i powierzchnie prądu	21
2.3.1. Tor elementu płynu	21
2.3.2. Linia prądu	22
2.3.3. Rurka prądu i włókno prądu	24
2.5. Warunek ciągłości przepływu	25
3. Równania ruchu płynu	32
3.1. Równanie ruchu płynu idealnego – równanie Eulera	33
3.2. Metodyka rozwiązywania równania Eulera	35
3.3. Równanie ruchu płynu lepkiego – równanie Navier-Stokesa	38
3.4. Przykład rozwiązania równania N-S, prawo Hagen-Poiseuille’a	47
3.5. Ruch laminarny i turbulentny. Doświadczenie Reynoldsa	53
3.6. Rozkład prędkości w poprzecznym przekroju rury w przepływie turbulentnym	59
4. Statyka płynów	64
4.1. Równanie równowagi dla nieruchomego płynu. Równanie Eulera	64
4.2. Warunki bezwirowości dla sił masowych	66
4.3. Opis równowagi płynu nieruchomego w polu sił grawitacyjnych	68
4.4. Wnioski z analizy równania Eulera	72
4.5. Równowaga cieczy w naczyniach połączonych	74
4.6. Poziom odniesienia przy pomiarze ciśnienia, ciśnienie atmosferyczne	79
4.7. Prawo Pascala	81
5. Napór hydrostatyczny	85
5.1. Napór cieczy na powierzchnie płaskie poziome	85
5.2. Napór cieczy na powierzchnie płaskie dowolnie zorientowane	87
5.3. Napór cieczy na powierzchnie o dowolnym kształcie	92
6. Opis ruchu płynu idealnego i wybrane zastosowania	95
6.1. Równanie Bernoulliego dla ruchu ustalonego płynu idealnego wzdłuż linii prądu.	95
6.2. Metodyka rozwiązywania równania Bernoulliego i jego interpretacja	97
6.3. Pomiar prędkości przepływu – sondy ciśnieniowe	102
6.4. Wprowadzenie do gazodynamiki	105
7. Równanie Bernoulliego dla płynów lepkich	108
7.1. Przemiany energii w płynie lepkim	108
7.2. Straty wywołane tarciem płynu	110
7.3. Straty lokalne	115
7.4. Interpretacja przemian energii w przepływie płynu rzeczywistego	122

7.5.	Przepływy przez przewody o niekołowym przekroju poprzecznym	125
8.	Kryteria podobieństwa przepływów	127
8.1.	Klasyfikacja kryteriów podobieństwa	127
8.2.	Bezwymiarowe równanie ruchu	128
8.3.	Sens fizyczny liczb podobieństwa	131
9.	Wprowadzenie do teorii przepływów potencjalnych	135
9.1.	Podstawowe pojęcia i zastosowane uproszczenia	135
9.2.	Potencjal prędkości	137
9.3.	Funkcja prądu	140
9.4.	Przepływy elementarne	145
9.4.1.	Przepływ równoległy	145
9.4.2.	Przepływ w narożu	147
9.4.3.	Źródło płaskie	149
9.5.	Superpozycja przepływów elementarnych, przykład rozwiązania	152

1. Podstawowe pojęcia mechaniki płynów

W większości zastosowań technicznych wyróżnia się dwa rodzaje ciał, tzn. płyny i ciała stałe, przy czym najczęściej spotykana definicja pozwalająca rozróżnić te dwa ośrodki brzmi następująco:

„...płyny w odróżnieniu od ciał stałych poddają się działaniu dowolnie nawet małych sił wywołujących zmiany kształtu”. Mimo, iż definicja ta jest całkowicie precyzyjna i łatwa do zrozumienia, to jednak po głębszym zastanowieniu nasuwać może szereg wątpliwości.

1.1. Mechanika ciała stałego a mechanika płynów.

Pierwsza wątpliwość dotyczyć może sprzeczności między intuicyjnie wyczuwaną strukturą płynu i pojęciem kształtu, bo przecież niektóre podręczniki definiują płyny jako ośrodki bezpostaciowe, które albo przyjmują kształt naczynia (ciecze) lub wypełniają całe naczynie (gazy).

Kolejna wątpliwość dotyczyć może celowości wprowadzania rozróżnienia między ciałami stałymi i płynami. Miedź, która jest typowym przedstawicielem ciał stałych, po podgrzaniu do temperatury powyżej 1350° K staje się cieczą i można spodziewać się, że w odpowiednio wysokiej temperaturze zamieni się w parę, czyli przejdzie w stan gazowy. Inne zaś ciała traktowane jako płyny jak np. asfalt czy lepik uderzane młotkiem będą pękać jak ciało stałe. Jeżeli jednak odwrócimy do góry dnem beczkę z lepikiem, to po upływie odpowiednio długiego czasu wypłynie on z beczki (choć w temperaturze otoczenia może to trwać nawet kilka tygodni).

Spróbujmy zatem przedstawić bardziej wnikliwą analizę właściwości fizycznych obydwu tych substancji. Z punktu widzenia inżyniera najistotniejszą własnością każdego materiału konstrukcyjnego jest jego zdolność do przenoszenia obciążeń, w których to warunkach deformacja konstrukcji nie może przekroczyć założonych przez projektanta granic. Przeprowadźmy zatem doświadczenie ilustrujące przebieg odkształcenia belki wykonanej z dowolnego materiału z klasy ciał stałych, która to belka będzie utwierdzona w

podłożu i poddana działaniu siły $F = \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ F \end{array} \right|$, jak pokazano na rys. 1.1a. Jeżeli pole przekroju poprzecznego belki jest równe A (patrz rys. 1.1a), wówczas naprężenia styczne w tym przekroju wynoszą:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

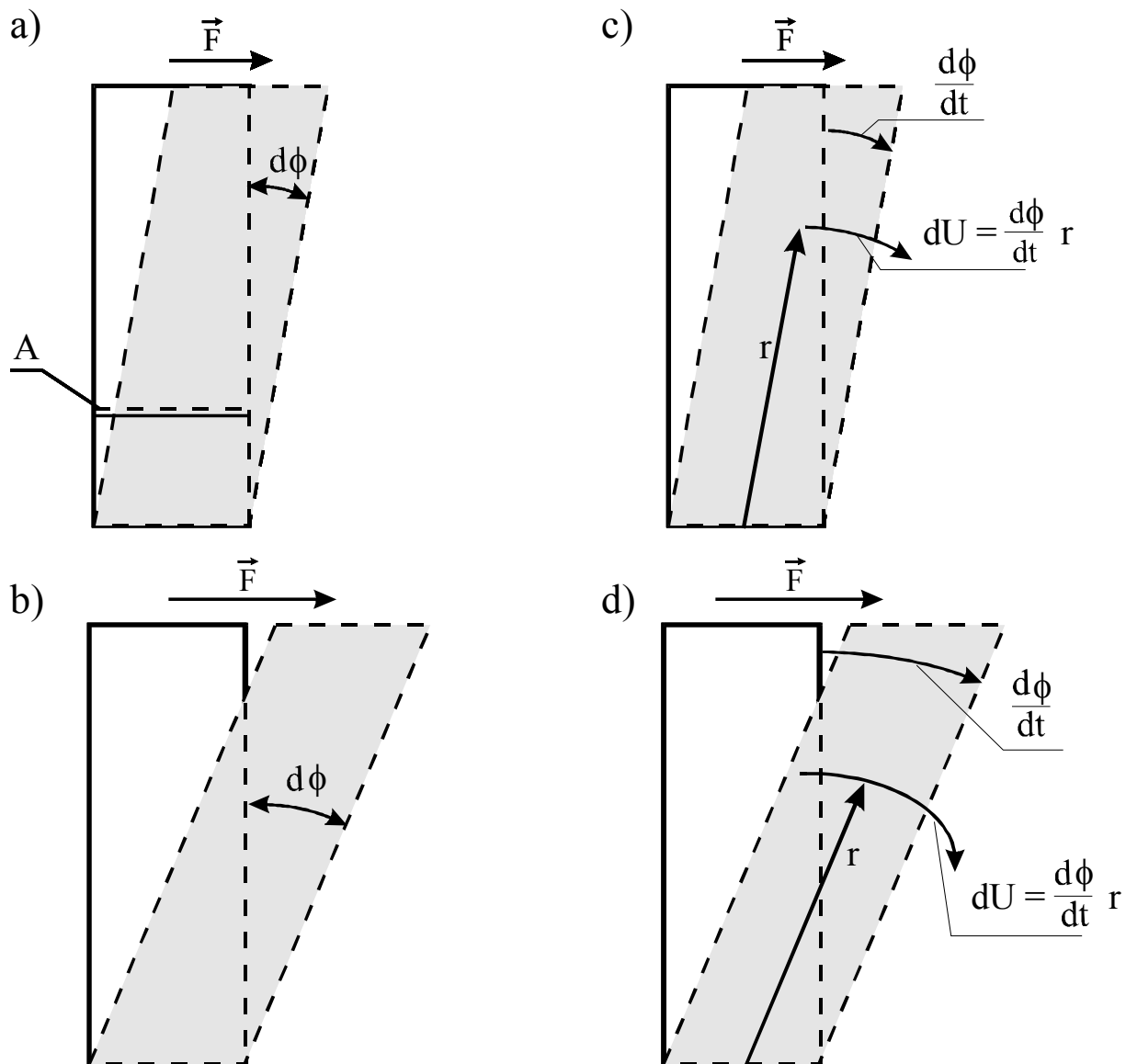
Naprężenia te są tym większe, im większa jest wartość siły F działającej na belkę, czemu towarzyszy większa deformacja kątowa $d\phi$, jak pokazano schematycznie na rys. 1.1b. Jeżeli deformacja mieści się w zakresie sprężystym, wówczas zgodnie z prawem Hooke'a napisać można:

$$\tau = c_s \cdot d\phi \quad (1.2)$$

które to prawo zakłada liniową proporcjonalność naprężeń stycznych i odkształceń, a współczynnik proporcjonalności jest modułem Younga charakteryzującym sprężystość poszczególnych materiałów (ciał stałych). Zależność (1.2) opisuje łatwe do przewidzenia

zachowanie ciała stałego, które poddane działaniu siły $F \rightarrow$ będzie deformować się aż do

osiągnięcia granicznego odkształcenia $(d\phi)_{gr}$, przy którym naprężenia sprężyste określone wz. (1.2):



Rys. 1.1. Proces deformacji ciała stałego a), b) oraz płynu c), d).

$$\tau = c_s \cdot (d\phi)_{gr} \quad (1.2a)$$

zrównają się z naprężeniami wywołanymi działaniem sił \vec{F} , które określone są wz. (1.1). Z porównania zależności (1.1) i (1.2) wynika następujący związek:

$$\frac{F}{A} = c_s \cdot (d\phi)_{gr} \quad (1.3)$$

który przekształcony do postaci:

$$(d\phi)_{gr} = \frac{1}{c_s} \cdot \frac{F}{A} \quad (1.3a)$$

wyjaśnia zachowanie sprężystej belki w sposób zgodny z naszymi intuicyjnymi oczekiwaniami. Ze wzoru (1.3a) wynika bowiem, że odkształcenie belki będzie tym większe, im większa jest wartość przyłożonej siły i odwrotnie proporcjonalne do pola przekroju poprzecznego belki oraz jej stałej sprężystości. Sformułowanie „intuicyjnie oczywisty” wyraża tutaj zrozumiałą dla wszystkich regułę, iż belka o zadanym kształcie będzie mogła

→
przenieść żadaną siłę F nie ulegając przy tym odkształceniu większemu niż założone pod warunkiem, że jej przekrój poprzeczny będzie odpowiednio duży oraz materiał odpowiednio „mocny”.

Podobne doświadczenie z belką wykonaną z płynu choć bardzo proste w zamyśle, jest niestety niemożliwe do wykonania w praktyce. Poprzestańmy zatem na doświadczeniu myślowym (zabieg, który będziemy często powtarzać) wydzielając z przestrzeni wypełnionej płynem identyczną jak poprzednio belkę o przekroju poprzecznym A . Wydzielenie to można rozumieć jako rozciągnięcie w płycie nieważkiej, idealnie podatnej folii, która utworzy płynną belkę w sposób pokazany na rys. 1.1c oraz d. W tym przypadku przyłożenie siły (nawet bardzo małej) spowoduje, że „płynna” belka będzie odkształcać się w sposób ciągły, nie osiągając żadnej wartości granicznej odkształcenia. Przyłożenie większej siły spowoduje natomiast, że belka będzie odkształcać się z większą prędkością, co pokazano schematycznie na rys. 1.1d. Uogólnieniem tej obserwacji jest następujący związek:

$$\tau = c_p \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad (1.4)$$

w którym $dU = \frac{d\phi}{dt}$ jest prędkością odkształcenia, a współczynnik proporcjonalności decydujący o oporze, z jakim płyn przeciwstawia się ruchowi, nazwany został przez Newtona lepkością

$$c_p = \mu.$$

Po uwzględnieniu we wz. (1.4) powyższej zależności otrzymujemy prawo Newtona:

$$\tau = \mu \frac{d\phi}{dt} \quad (1.5)$$

wyrażające podstawową własność płynu jaka jest proporcjonalność naprężeń stycznych do prędkości odkształcenia. Praktyczną ilustracją tego prawa będzie próba przemieszczania dłoni zanurzonej w cieczy, kiedy to bardzo powolny ruch powoduje minimalny opór, podczas gdy próba przyspieszenia ruchu wywoła gwałtownie narastającą reakcję płynnego ośrodka.

Podsumowaniem powyższych obserwacji może być następująca definicja:

„...płyn jest ośrodkiem, który próbom zmiany jego postaci stawia opór proporcjonalny do prędkości deformacji”.

Oznacza to, że do zmiany postaci płynu wystarczy dowolnie mała siła, jeżeli tylko deformacja będzie przeprowadzona bardzo powoli a jeśli do danego fragmentu płynu zostanie przyłożona duża siła, wówczas przy znacznych prędkościach deformacji płyn przejawiać będzie bardzo duży opór. Omówione powyżej doświadczenie „myślowe” sprawiać może wrażenie zabiegu sztucznego, chociaż w rzeczywistości takim właśnie deformacjom może w rzeczywistości podlegać płyn. Dla przykładu, przeanalizujmy zachowanie elementu płynu w przepływie pokazanym na rys. 1.2a, w którym występuje gradient prędkości spowodowany np. obecnością ściany (rys. 1.2a). Pokazany tu element płynu o długości krawędzi dy , poddany jest odkształceniu postaciowemu, wywołanemu różnicą prędkości dU na górnej i dolnej

ścianie (patrz rys. 1.2b). Liniowe przemieszczenie górnej ściany narasta w sposób ciągły w czasie, spełniając przy tym następujący związek:

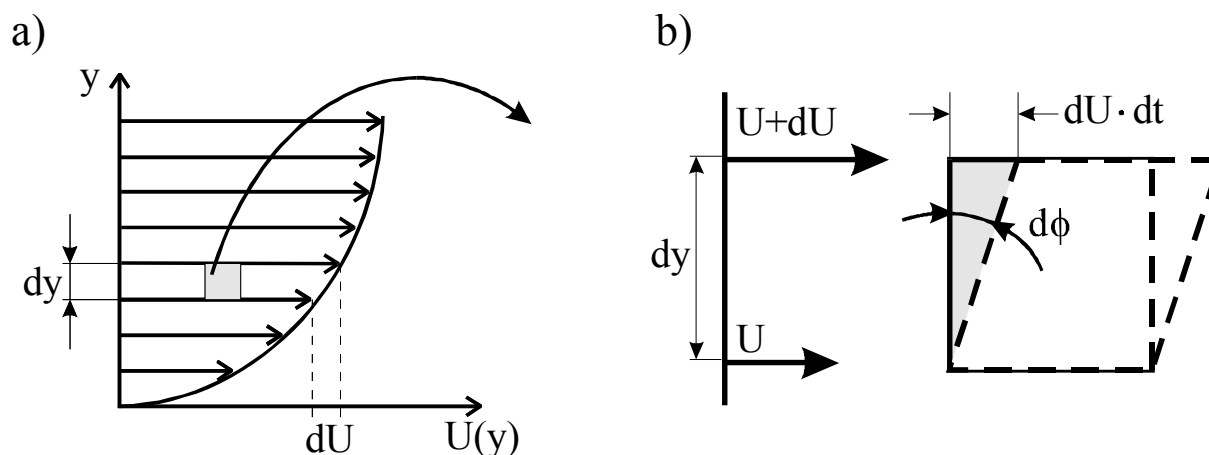
$$\operatorname{tg}(d\phi) = \frac{dU \cdot dt}{dy} \quad (1.6)$$

Ponieważ element płynu ma rozmiary nieskończenie małe, stąd zależność ta może być zapisana jako:

$$d\phi = \frac{dU dt}{dy} \quad (1.6a)$$

co pozwala powiązać prędkość deformacji kątowej i gradient prędkości:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dU}{dy} \quad (1.6b)$$



Rys. 1.2. Proces deformacji elementarnej objętości płynu w przepływie w obecności gradientu prędkości.

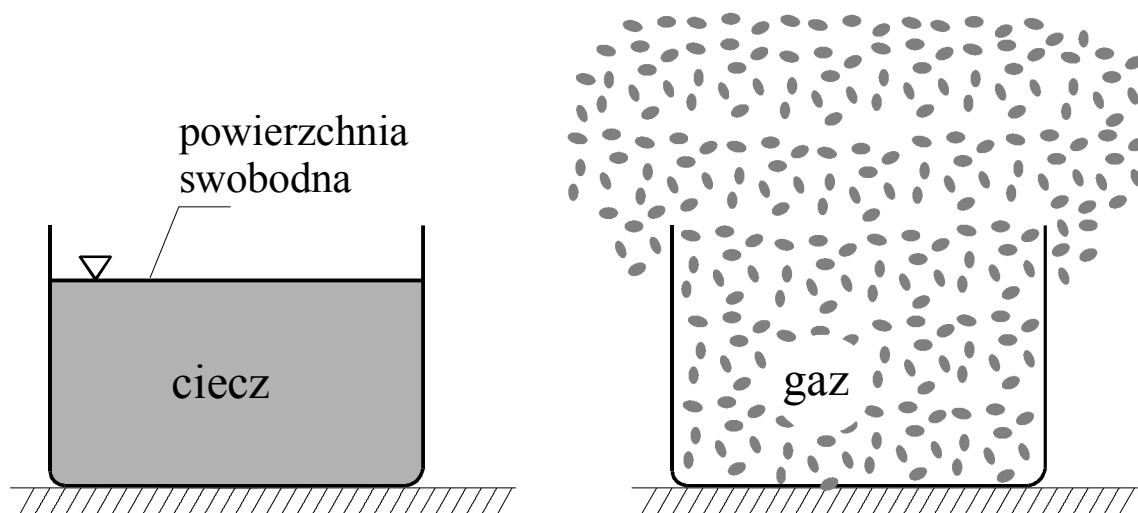
Podstawienie powyższej zależności do wz. (1.5) pozwala z kolei wyrazić prawo Newtona w najczęściej wykorzystywanej postaci:

$$\tau = \mu \frac{d\phi}{dt} = \mu \frac{dU}{dy} \quad (1.7)$$

gdyż w mechanice płynów analizie poddajemy nie prędkość deformacji lecz pole prędkości (np. $U(y)$ - rys. 1.2a), które uzyskujemy jako rozwiązanie równań ruchu. Możemy zatem uogólnić podaną powyżej definicję płynu, która zgodnie z zal. (1.7) może być wyrażona następująco:

*„...płyn jest ośrodkiem, w którym naprężenia styczne są proporcjonalne do prędkości deformacji”**.

* - gradient dU/dy jest w przepływie dwuwymiarowym pokazany na rys. 2a jedyną niezerową składową tensora prędkości deformacji –patrz rozdz.3.



Rys. 1.3. Zachowanie cieczy a) oraz gazu b) w stanie równowagi statycznej.

Płynami są zarówno ciecze jak i gazy, które jednak różnią się dwoma istotnymi cechami. Ciecze przyjmują zawsze kształt naczynia, w którym się znajdują i na granicy z otaczającym je innym płynem tworzą powierzchnię rozdziału nazywaną często swobodną powierzchnią (rys. 1.3a). Gaz jest natomiast płynem, który rozprzestrzenia się w całej przestrzeni nie tworząc jakichkolwiek powierzchni rozdziału (patrz rys. 1.3b).

Drugą istotną różnicą pomiędzy cieczami i gazami to ich ściśliwość rozumiana jako opór stawiany próbom zmiany objętości. Ciecze są praktycznie nieściśliwe, gdyż przykładowo zmiana objętości wody o zaledwie 5% zachodzi dopiero przy ciśnieniu przekraczającym 1000 bar. Gazy natomiast bardzo łatwo dają się sprężyć do bardzo małych objętości i z równą łatwością rozprężają się zajmując zawsze całą dostępną przestrzeń.

Trzecim powodem konieczności utrzymywania podziału na ciecze i gazy jest bardzo duża różnica ich gęstości, niespotykana w ciałach stałych. Przykładowo, różnica gęstości między powietrzem ($\rho \approx 1.2 \text{ [kg/m}^3\text{]}$) i wodą ($\rho = 1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$) sięga aż trzech rzędów wielkości a jeżeli porównamy najlżejszy z gazów (wodór o gęstości $\rho = 0.08999 \text{ [kg/m}^3\text{]}$) i najcięższą ze znanych cieczy (rtęć dla której $\rho = 1.355 \times 10^4 \text{ [kg/m}^3\text{]}$) to stosunek ten przekroczy wówczas $1.6 \cdot 10^5$. Zainteresowany Czytelnik może łatwo sprawdzić, że stosunek gęstości najlżejszych i najcięższych ciał stałych niewiele przekracza rząd wielkości.

Ostatnią z różnic własności fizycznych między cieczami i gazami dotyczy zmienności oporu stawianego zanurzonemu w nich ciałom w funkcji temperatury. Podgrzanie cieczy powoduje iż poruszające się w niej ciało doznaje mniejszego oporu, podczas gdy w gazach opór ruchu rośnie wraz z temperaturą ośrodka. Opór wywołany tarciami płynu o ściany jest bowiem proporcjonalny do współczynnika lepkości dynamicznej μ , który wraz ze wzrostem temperatury wzrasta w cieczach i maleje w gazach, jak pokazano w tabl. 1.1 na przykładzie wody i powietrza (dane dla ciśnienia $p_a = 10^5$). Odmiennosć zachowania współczynnika lepkości μ może zostać wytłumaczona przez molekularne właściwości tych płynów, gdyż teoria kinetyczno-molekularna prowadzi do wniosku, że lepkość płynu jest proporcjonalna do długości drogi swobodnej:

$$\mu \approx l$$

Wzrost temperatury cieczy, zwiększający prędkość ruchu molekuł przy niezmiennym ich „upakowaniu” (stała gęstość) zmniejszać musi średnią odległość między zderzeniami, co z kolei zmniejsza współczynnik lepkości. Przyrost temperatury gazu pozostającego pod stałym ciśnieniem zmniejsza upakowanie molekuł (spadek gęstości gazu pod wpływem temperatury,

co z kolei zwiększa długość drogi swobodnej i powoduje wzrost wartości współczynnika lepkości dynamicznej gazu.

Tablica 1.1. Zmienność lepkości wody i powietrza w funkcji temperatury

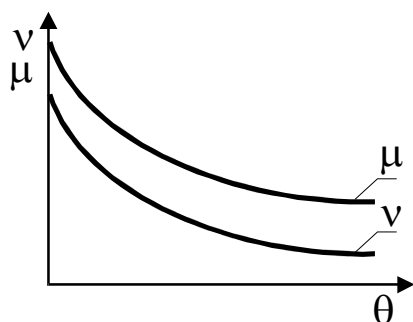
Temp. °C	W o d a		Powietrze	
	μ	ν	μ	ν
	$\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 10^5$	$\text{m}^2/\text{s} \cdot 10^6$	$\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 10^5$	$\text{m}^2/\text{s} \cdot 10^6$
0	179,2	1,792	1,724	13,33
10	130,7	1,307	1,773	14,21
20	100,2	1,004	1,882	15,12
30	79,7	0,801	1,869	16,04
40	65,3	0,658	1,915	16,98
60	48,3	0,482	2,03	18,8
80	36,4	0,368	2,13	20,9
100	28,9	0,296	2,22	23,1

W mechanice płynów posługujemy się także pojęciem lepkości kinematycznej ν definiowanej jako iloraz lepkości dynamicznej i gęstości:

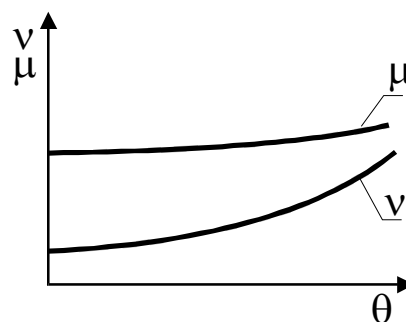
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (1.8)$$

Jeżeli w cieczech wzrost temperatury powoduje przyrost prędkości ruchu molekuł bez zmiany ich wzajemnych odległości, w rezultacie spadek lepkości dynamicznej cieczy przy niezmienniej gęstości (określonej „upakowaniem” molekuł) powoduje identyczne zmniejszenie lepkości kinematycznej, co pokazano na rys.1.8a. Molekuły gazu odległe są od siebie na tyle daleko, że siły wzajemnego przyciągania nie mogą już działać i dlatego przyrost temperatury powoduje nie tylko wzrost prędkości ich ruchu lecz zwiększa także ich wzajemne odległości, czego wynikiem jest spadek gęstości gazu prowadzący do szybszego wzrostu współczynnika lepkości kinematycznej (patrz rys. 1.8b).

a)



b)



Rys. 1.4. Zmienność lepkości kinematycznej cieczy a) i gazu b)

Podsumowując przedstawione powyżej informacje stwierdzić można, że właściwości fizyczne płynów i ciał stałych różnią się bardzo istotnie.

1.2 Płyn jako ośrodek ciągły

Model atomistyczny wyjaśnia co prawda podstawowe własności płynów lecz jego stosowanie wymaga bardzo złożonych metod opisu ruchu poszczególnych molekuł, przy czym stopień trudności zagadnienia jest tym większy, im więcej cząstek objąć musimy analizą. Opis struktury molekularnej operuje jednak bardzo małymi wymiarami, o czym mówiliśmy już w rozdz. 1.2 podając przykładowe wymiary molekuł i dróg swobodnych. W zastosowaniach technicznych operujemy znacznie większymi skalami liczonymi w metrach (długość kadłuba statku, rozpiętość skrzydeł samolotu), centymetrach (średnice wirników pomp) lub milimetrach (szerokość szczeliny łożyska ślizgowego). Najmniejszy wymiar liniowy, który może mieć znaczenie w mechanice płynów jest rzędu dziesiątych lub co najwyżej setnych części milimetra i odpowiada wysokości chropowatości powierzchni, która wywoływać może zmiany oporów tarcia płynu o ścianę. Wobec tak znacznej różnicy skal między strukturą molekularną płynu i geometrycznymi wymiarami przepływu oczywistym staje się pytanie, czy w mechanice płynów musimy stosować metody oparte o model atomistyczny materii. Kryterium pozwalającym rozstrzygnąć tę kwestię jest liczba Knudsenowa Kn , definiowana jako iloraz charakterystycznej skali molekularnej ośrodka λ oraz skali geometrycznej L analizowanego zjawiska:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1.9)$$

Jeżeli przyjmiemy, że rozpatrywanym ośrodkiem będzie powietrze, wówczas dla tzw. warunków normalnych:

$$p = 10^5 \text{ [Pa]}; \quad T = 273 \text{ [K]}$$

średnia długość drogi swobodnej będąca charakterystyczną skalą struktury molekularnej ośrodka wynosić będzie:

$$\lambda = 9.2 \times 10^{-8} \text{ [m]}$$

Jeżeli przyjmiemy, że najmniejszy wymiar liniowy istotny dla opisu zachowania płynu będzie rzędu setnych części milimetra tzn.:

$$L = 10^{-5} \text{ [m]}$$

wówczas liczba Knudsenowa wynosić będzie:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \cong 10^{-2}$$

Jak podaje W. Prosnak, dla liczb Knudsenowa spełniających warunek:

$$Kn < 0.1$$

analizowany ośrodek uważać można za ciągły, tzn. opis jego nieuporządkowanej i chaotycznej struktury molekularnej zastąpiony być może przez tzw. *model continuum*. Ciągłość ośrodka wymaga, aby jego gęstość zmieniała się w sposób ciągły, tzn. aby nie była wrażliwa na chwilowe zmiany ilości cząstek zawartych w analizowanej objętości. Będzie to możliwe jeżeli objętość ta nie będzie mniejsza od pewnej wielkości granicznej, tzn.:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_{gr}} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.10)$$

co oznacza, że najmniejszy wymiar płynu spełniającego warunki ciągłości jest rzędu:

$$L^3 \approx \Delta V_{gr}$$

Jak podaje F.M.White, dla większości gazów i cieczy graniczna objętość jest rzędu:

$$\Delta V_{gr} \approx 10^{-18} [\text{m}^3]$$

gdyż wówczas ilość zawartych w niej molekuł jest na tyle duża, że przypadkowe zmiany ich koncentracji nie mogą zmienić wyniku pomiaru gęstości dokonanego zgodnie ze wzorem (1.10). Przykładowo, graniczna objętość powietrza w standardowych warunkach (10^5 Pa; 273° K) zawierać będzie aż 10^7 molekuł i dopiero wówczas wymiar liniowy

$$L_{gr} \approx 10^{-6} [\text{m}]$$

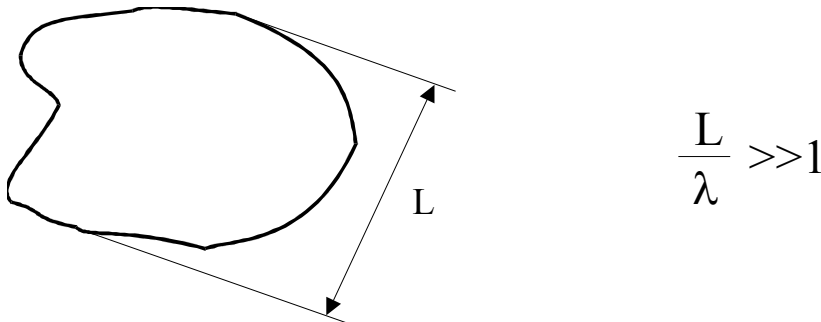
wstawiony do wzoru (1.9) sprawi, że liczba Knudsena osiągnie graniczną wartość:

$$\text{Kn} = 0.1.$$

Jeżeli dla tak małego fragmentu objętości układać będziemy warunek równowagi sił, wówczas zaniedbać będzie można zmienność tychże sił wzdłuż długości L_{gr} , gdyż przykładowo dla najcięższej cieczy jaką jest rtęć, zmienność ciśnienia pomiędzy górną i dolną krawędzią objętości ΔV_{gr} (rys. 1.5) wynosić będzie:

$$\Delta p = 10^{-6} \times 1.36 \times 10^4 \approx 0.01 [\text{Pa}]$$

co wobec wartości ciśnienia atmosferycznego na swobodnej powierzchni wynoszącej 10^5 [Pa] stanowić będzie znikomo małą część. Jeżeli zatem dla tak małej objętości zmienność gęstości będzie ciągła, wówczas możliwe będzie użycie rachunku różniczkowego w opisie stanów równowagi płynu, podobnie jak ma to miejsce w klasycznej mechanice.



Rys. 1.5. Element płynu jako graniczna objętość ośrodka ciągłego

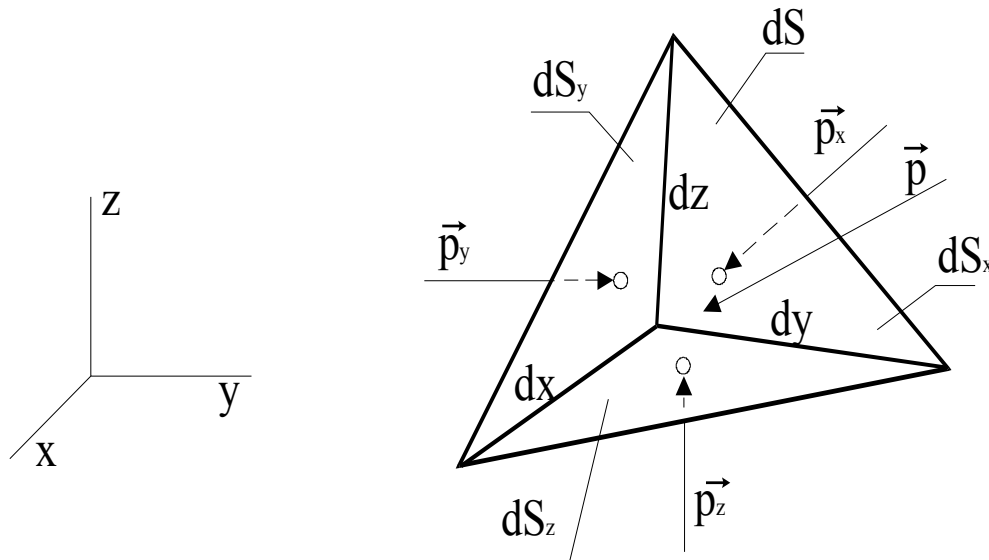
Dalsze analizy prowadzić więc będziemy dla objętości spełniających warunki ciągłości i objętość taką nazywa się *elementem płynu* dla którego definicja sformułowana być może następująco:

„...elementem płynu jest wyodrębniona część masy płynu o wymiarach nieskończenie małych w porównaniu z wymiarami całej masy płynu poruszającej się lub pozostającej w spoczynku a jednocześnie dużych w porównaniu z wymiarami struktury molekularnej płynu”.

Tak rozumiany płyn określany jest powszechnie mianem „continuum” a stosowany w dalszej części tekstu sposób analizy typowy jest dla ośrodków ciągłych i w większości zastosowań technicznych ten sposób opisu własności płynu jest wystarczająco dokładny. Jedynie w szczególnych przypadkach (np. w górnych warstwach stratosfery) np. gdy ciśnienie gazu jest bardzo niskie, wówczas odległości między molekułami stają się tak duże, że założenie o ciągłości ośrodka przestaje być spełnione. W takich przypadkach konieczne jest stosowanie innych metod opisu własności płynu, zwanych dynamiką molekularną lecz ta dziedzina wykracza poza przyjęty zakres tematyczny niniejszego wykładu.

1.3. Ciśnienie w płynie jako wielkość skalarna

Pojęcie ciśnienia definiowanego jako wartość naprężeń powierzchniowych działających prostopadle do powierzchni można wyjaśnić rozpatrując płyn pozostający w spoczynku, gdyż brak tarcia sprawia, że siła powierzchniowa musi być skierowana prostopadle do powierzchni. Dla analizy własności ciśnienia wybierzmy w płynie znajdującym się w stanie równowagi element płynu o kształcie czworościanu jak pokazano na



rys. 1.6.

Rys.1.6. Siły powierzchniowe działające na czworościenny element płynu

Naprężenia powierzchniowe zostały przeniesione na powierzchnie czworościanu przy zastosowaniu metody przekrojów a sam czworościan poddany zostanie zeszczywnieniu, przy czym dla ułatwienia analizy boki dx , dy , dz są równoległe do odpowiednich osi przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych.

Jeżeli \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z oznaczają wektory naprężeń działających na ściany boczne

czworościanu dS_x , dS_y , dS_z prostopadłe do osi współrzędnych x , y , z wówczas \vec{p} oznaczać będzie naprężenia normalne do powierzchni dS . Na element płynu w stanie równowagi działać będą siły masowe*

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \quad (1.11)$$

oraz siły powierzchniowe dla których przyjmujemy:

* należy zwrócić uwagę, że rozpatrujemy tu siły jednostkowe.

$$\begin{aligned}
p_x &= \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ p_x \end{array} \right| \\
p_y &= \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ p_y \end{array} \right| \\
p_z &= \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ p_z \end{array} \right| \\
p &= \left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ p \end{array} \right|
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

Powyższe siły spełniać muszą warunki równowagi, które dla poszczególnych osi układu współrzędnych zapisać można następująco:

$$\sum \text{wszystkich sił na dany kierunek} = 0$$

Po uwzględnieniu związku (1.12) oraz po zsumowaniu sił pokazanych na rys. 1.6 warunek powyższy zapisać można następująco:

na oś x:

$$\frac{1}{3}\rho X dS_x dx + p_x dS_x - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, i \end{array} \right) = 0$$

- na oś y:

$$\frac{1}{3}\rho Y dS_y dy + p_y dS_y - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, j \end{array} \right) = 0$$

- na oś z:

$$\frac{1}{3}\rho Z dS_z dz + p_z dS_z - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, k \end{array} \right) = 0$$

Występujące w powyższych warunkach równowagi siły masowe są dla elementu płynu pomijalnie małe ($dx, dy, dz \rightarrow 0$), wobec czego zapisać można:

$$p_x dS_x - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, i \end{array} \right) = 0$$

$$p_y dS_y - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, j \end{array} \right) = 0$$

$$p_z dS_z - p dS \cos \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ p, k \end{array} \right) = 0$$

Ponieważ z elementarnych zależności geometrycznych dla czworościanu wynika:

$$d S_x = d S \cos \left(\begin{matrix} \vec{p} & \vec{i} \\ p & i \end{matrix} \right)$$

$$d S_y = d S \cos \left(\begin{matrix} \vec{p} & \vec{j} \\ p & j \end{matrix} \right)$$

$$d S_z = d S \cos \left(\begin{matrix} \vec{p} & \vec{k} \\ p & k \end{matrix} \right)$$

więc powyższe warunki równowagi prowadzą do związków:

$$p_x - p = 0$$

$$p_y - p = 0$$

$$p_z - p = 0$$

co ostatecznie pozwala zapisać:

$$p_x = p_y = p_z = p = 0 \quad (1.13)$$

Ponieważ nie poczyniliśmy żadnych założeń dotyczących elementu płynu, więc jego objętość może maleć do zera i wówczas dla każdego punktu płynu słuszna będzie zależność (1.13), która opisuje *prawo Eulera o niezależności ciśnienia od orientacji elementu powierzchni*. Zgodnie z tym prawem w płynie pozostającym w spoczynku w stanie równowagi ciśnienie jest wielkością skalarną i w każdym punkcie płynu określone być może przez podanie jednej tylko wartości będącej skalarną funkcją położenia i czasu:

$$p = p(x, y, z, t) \quad (1.14)$$

Prawo to jest ważne jeżeli w analizowanym ośrodku nie występują siły lepkości tzn. dla płynu pozostającego w spoczynku lub poruszającego się jako ciało sztywne. Jeżeli w płynie zachodzą deformacje aktywizujące lepkość wówczas prawo Eulera wymaga pewnej korekty omówionej w rozdz. 3. Jednostki ciśnienia i problem wyboru poziomu odniesienia przy obliczaniu wartości ciśnienia omówiony jest w rozdz. 4 dotyczącym równowagi hydrostatycznej.

2. Podstawy kinematyki płynów

Opis przepływu wymaga znajomości sposobu, w jaki własności płynu takie jak prędkość, gęstość czy ciśnienie zmieniają się w przestrzeni i w czasie.

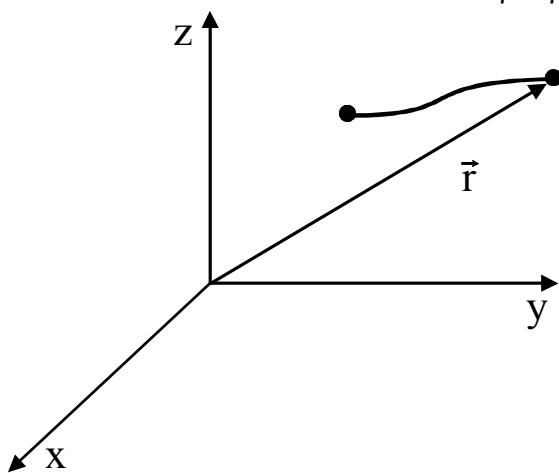
W klasycznej mechanice ciała stałego zajmujemy się śledzeniem trajektorii danego układu materialnego podczas gdy w mechanice płynów koncentrujemy się raczej na uzyskaniu informacji o wartościach interesujących nas parametrów w danym punkcie przestrzeni czy w określonej chwili t . Istnieją jednak takie przepływy, dla których konieczna jest także znajomość trajektorii elementów płynu, czego przykładem może być analiza procesu rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń. Opis trajektorii elementów płynu oraz uzyskanie informacji o przestrzenno-czasowej zmienności charakterystyk przepływu wymaga zastosowania różnych metod analizy, znanych jako opis Lagrange'a i Eulera.

2.1. Metoda Lagrange'a opisu ruchu płynu

Metoda Lagrange'a zakłada, że przedmiotem analizy jest zmienność parametrów takich jak prędkość, ciśnienie czy gęstość wyznaczona dla każdego, pojedynczego elementu

płynu. Jeżeli przez \vec{r} oznaczymy wektor opisujący położenie analizowanego elementu płynu (rys. 2.1), wówczas zmienność parametrów ruchu w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać będzie można następująco:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \\ p &= p(t) \\ \rho &= \rho(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$



Rys.2.1 Ilustracja opisu ruchu metodą Lagrange'a.

Ponieważ analizie podlega tylko wybrany element płynu, który śledzony jest w trakcie ruchu, stąd też ten typ analizy nazywany jest często *analizą wędrowną*. Aby możliwe było objęcie analizą Lagrange'a całej objętości płynu, niezbędne jest opracowanie sposobu odróżnienia poszczególnych elementów płynu. Można to zrealizować w sposób pokazany na rys. 2.2, na którym zaznaczono położenie wybranego elementu płynu określone współrzędnymi a, b, c w dowolnej chwili $t = t_0$ w której rozpoczęto obserwację ruchu analizowanej objętości płynu.

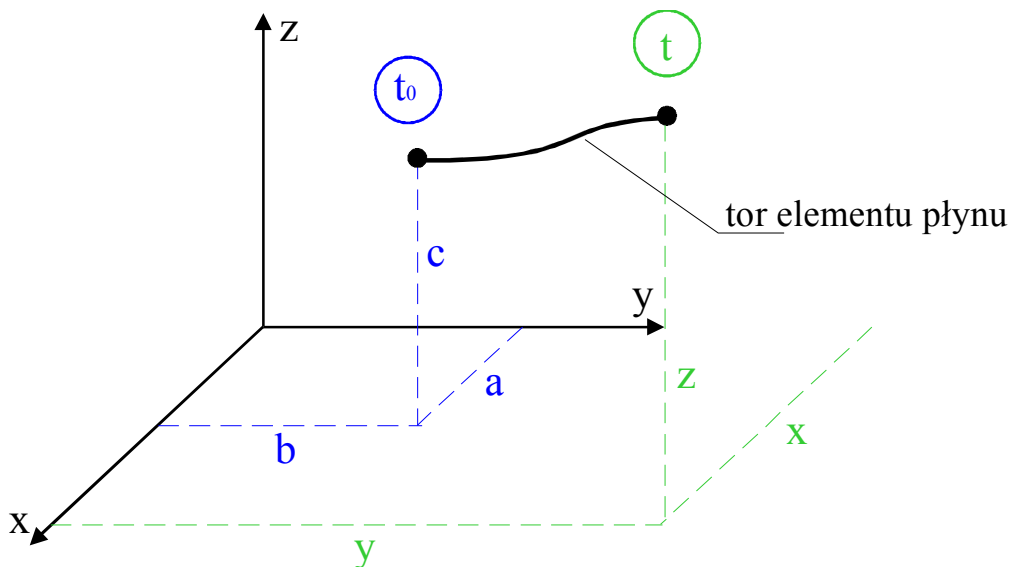
Wówczas zmienność parametrów danego elementu płynu opisać można poprzez podanie następujących funkcji:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= F_1(a, b, c, t) \\
 y(t) &= F_2(a, b, c, t) \\
 z(t) &= F_3(a, b, c, t) \\
 p(t) &= F_4(a, b, c, t) \\
 \rho(t) &= F_5(a, b, c, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

w których jedynie czas t jest zmienną a wielkości a, b, c są parametrami służącymi do rozróżnienia między sobą poszczególnych elementów płynu. Parametry:

$$\begin{aligned}
 a &= x(t_0) \\
 b &= y(t_0) \\
 c &= z(t_0) \\
 p_0 &= p(t_0) \\
 \rho_0 &= \rho(t_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

są warunkami początkowymi, a ponieważ wielkości a, b, c, t są jedynymi zmiennymi niezależnymi, stąd też są one nazywane zmiennymi Lagrange'a, podczas gdy równania (2.2) są znane jako równania Lagrange'a.



Rys.2.2. Znaczenie warunków początkowych w metodzie Lagrange'a.

Znając równanie ruchu danego elementu płynu wyznaczyć można jego prędkość i przyspieszenie w kolejnych chwilach czasu. W tym celu zmienność wektora prędkości zapisać można jako:

$$\vec{U}(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}
 \tag{2.4}$$

lub też jako zmienność składowych wektora prędkości:

$$\begin{aligned}
 U_x(t) &= \frac{\partial F_1(a, b, c, t)}{\partial t} \\
 U_y(t) &= \frac{\partial F_2(a, b, c, t)}{\partial t} \\
 U_z(t) &= \frac{\partial F_3(a, b, c, t)}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Różniczkując następnie prędkość względem czasu otrzymać możemy przyspieszenie danego elementu płynu:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

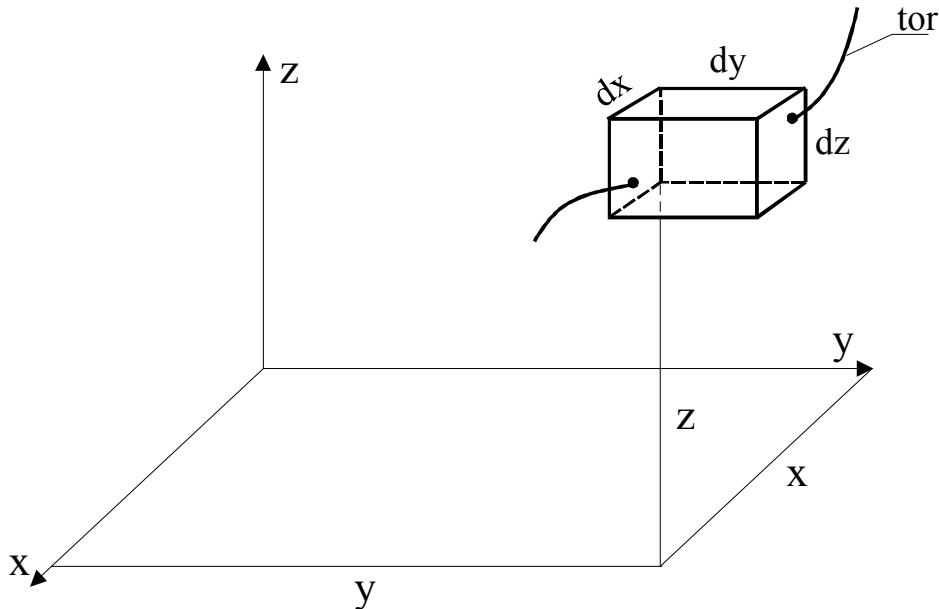
oraz rzuty tego wektora na poszczególne osie układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= \frac{\partial^2 F_1(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\
 a_y(t) &= \frac{\partial^2 F_2(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\
 a_z(t) &= \frac{\partial^2 F_3(a, b, c, t)}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Jeżeli wielkości a, b, c będziemy traktować jako stałe przy zmiennym t , wówczas równania (2.2), (2.5) oraz (2.6) będą przedstawiać zmienność parametrów hydrodynamicznych danego elementu płynu zachodzącą w trakcie jego ruchu. Możemy również potraktować a, b, c jako zmienne przy stałym t , i wówczas równania te przedstawiać będą zmienność parametrów hydrodynamicznych w całej analizowanej objętości płynu w danej chwili t .

2.2. Eulerowski opis ruchu płynu.

Opis Eulera zakłada, że znane są wartości parametrów hydrodynamicznych w każdym punkcie przestrzeni w każdej kolejnej chwili czasu. W tym celu, w analizowanym płynie wydziela się tzw. obszar kontrolny, którego lokalizacja określona jest współrzędnymi x, y, z jak pokazano na rys. 2.3.



Rys.2.3. Eulerowski opis ruchu płynu.

W obszarze tym określa się wartości parametrów hydrodynamicznych przepływu w kolejnych chwilach czasu. Dla zapewnienia niezbędnej dokładności wyznaczanych parametrów obszar ten winien mieć rozmiary elementarne, czyli jego objętość może być utożsamiana z objętością elementu płynu. Otrzymane w ten sposób informacje dotyczące będą zmienności czasowej parametrów określonych tylko dla jednego punktu przestrzeni, a rozszerzenie ich na cały obszar analizowanego przepływu wymaga zbadania, w jaki sposób wielkości te zmieniają się gdy punkt obserwacji (elementu płynu) zostanie przemieszczony w inne miejsce.

Zmienność parametrów hydrodynamicznych określona metodą Eulera będzie mogła być zatem zapisana następująco:

$$\begin{aligned}
 \vec{U} \left(\vec{r}, t \right) &= \frac{d \vec{r}}{d t} \\
 p &= p \left(\vec{r}, t \right) \\
 \rho &= \rho \left(\vec{r}, t \right)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie \vec{r} jest promieniem wyznaczającym lokalizację obszaru kontrolnego.

W kartezjańskim układzie współrzędnych opis pola przepływu wyrazić można następującym układem równań:

$$\begin{aligned}
 U_x &= \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t) \\
 U_y &= \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t) \\
 U_z &= \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t) \\
 p &= f_4(x, y, z, t) \\
 \rho &= f_5(x, y, z, t)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

W równaniach Eulera zmienne x, y, z wyznaczają położenie obszaru kontrolnego a nie współrzędne elementu płynu w kolejnych chwilach czasu jak było to w metodzie Lagrange'a. W metodzie Eulera nie wyróżniamy zatem żadnego elementu płynu i dlatego też nie otrzymujemy równania toru elementu lecz informację o wartościach parametrów przepływu w danym miejscu. Jest to informacja o charakterze lokalnym i dlatego też metoda Eulera nazywana jest często *analizą lokalną*, której wynikiem jest informacja o wartościach parametrów hydrodynamicznych (prędkość, ciśnienie, gęstość) w danym punkcie przestrzeni w określonej chwili czasu.

Dla stworzenia równań potrzebna jest jeszcze informacja o przyspieszeniu, którego doznaje element płynu, który w danej chwili t przepływa przez objętość kontrolną. Ponieważ wektor prędkości jest funkcją współrzędnych przestrzeni i czasu

$$\vec{U}(x, y, z, t)$$

więc przyspieszenie elementu płynu zapisać należy:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

co po uwzględnieniu wz. (2.8) daje:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + U_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \quad (2.9)$$

W wyrażeniu powyższym występuje operator różniczkowania:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

który wyraża zmianę prędkości w czasie elementów płynu przepływających przez obszar kontrolny i ta zmiana nazywana jest *pochoďną lokalną*. Przepływ, w którym pochodne lokalne są niezerowe nazywany jest niestacjonarnym co oznacza, że prędkość w każdym z punktów może zmieniać się wraz z upływem czasu. Pozostałe operatory różniczkowe:

$$U_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + U_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + U_z \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}$$

wyrażają zmianę prędkości gdy element płynu porusza się w przestrzennie niejednorodnym polu prędkości. Ten zespół operatorów nazywany jest *pochoďną konwekcyjną* i może on przyjmować wartości niezerowe także i w przepływie ustalonym, jeżeli tylko prędkość przepływu zmienia się w zależności od współrzędnych przestrzeni. Przykładem pozwalającym zrozumieć różnicę między pochoďną lokalną i konwekcyjną może być przepływ przez dyfuzor, który przy stałej wartości strumienia masy będzie przepływem ustalonym i dla którego wartości pochodnych lokalnych będą równe zero, gdyż w każdym punkcie dyfuzora prędkość nie będzie zmieniać się z czasem. Jednocześnie element płynu poruszający się wzdłuż dyfuzora będzie zwalniał co oznacza, że będzie on doznawał ujemnego przyspieszenia konwekcyjnego. Dla zaznaczenia specjalnego sensu fizycznego pochodnej czasowej zapisanej w zmiennych Eulera, w mechanice płynów przyjęto używać specjalnego zapisu:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} + U_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.10)$$

nazywając operator $\frac{D}{Dt}$ *pochoďną substancjalną*. Operator ten może być zastosowany zarówno do wielkości wektorowych (prędkość) jak i skalarnych, takich jak ciśnienie czy gęstość i przykładowo w kartezjańskim układzie współrzędnych pochodne substancjalne wielkości hydrodynamicznych zapisać można następująco:

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{DU_x}{Dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \\
a_y &= \frac{DU_y}{Dt} = \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \\
a_z &= \frac{DU_z}{Dt} = \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \\
\frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + U_x \frac{\partial p}{\partial x} + U_y \frac{\partial p}{\partial y} + U_z \frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

w którym występują składowe wektora przyspieszenia:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Postać (2.11) pochodnych substancjalnych może zostać zapisana w sposób bardziej zwarty z zastosowaniem operatorów wektorowych:

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

co pozwala zapisać

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \text{grad} \vec{U} \\
\frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{p} \cdot \text{grad} p
\end{aligned} \tag{2.12a}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{grad} \rho$$

lub:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \\
\frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{p} \cdot \nabla) p \\
\frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \cdot \nabla) \rho
\end{aligned} \tag{2.12b}$$

W związkach (2.12a) i (2.12b) symbolem (\bullet) oznaczono iloczyn skalarny analizowanych wielkości.

2.4. Trajektorie, linie i powierzchnie prądu

Przedmiotem zainteresowania inżyniera zajmującego się mechaniką płynów są wartości parametrów hydrodynamicznych w określonych punktach przepływu, ale zrozumienie zachodzących w tymże przepływie zjawisk wymaga także znajomości obrazu znajomości tego przepływu. Pojęcie to jest łatwe do intuicyjnego zrozumienia i najczęściej utożsamiamy je z kształtem linii zakreślonych przez drobne cząstki zawiesiny unoszone w płynie lub przedmioty pływające na powierzchni. Większość płynów jest bowiem przezroczysta i bezpośrednia obserwacja trajektorii elementów płynu nie jest możliwa i dlatego też wizualizacja ruchu wymaga wprowadzenia do przepływu specjalnych znaczników takich jak kolorowe zawiesiny lub barwniki. Problem opisu tak rozumianego obrazu przepływu jest stosunkowo prosty do rozwiązania, jeżeli stosujemy ujęcie Lagrange'a, w

którym opis drogi elementu płynu jest uzyskiwany bezpośrednio. Zagadnienie komplikuje się gdy ruch płynu opisujemy metodą Eulera, w której otrzymujemy informację o prędkości płynu i konieczne jest wprowadzenie dodatkowych zabiegów, które pozwoliłyby na odtworzenie trajektorii elementów płynu. Dlatego też w kinematycznym opisie ruchu płynu konieczne jest wprowadzenie co najmniej dwóch pojęć tzn. toru elementu płynu i linii prądu, których własności i możliwy obszar zastosowań wymagający bardziej szczegółowej dyskusji.

2.4.1. Tor elementu płynu

Pod pojęciem obrazu przepływu rozumiemy trajektorie lub *tory elementów płynu*, które są miejscem geometrycznym kolejnych położenia poruszającego się elementu płynu.

Tak rozumiany opis zakreślonej w przestrzeni przez poruszający się element płynu uzyskać można z równań ruchu (Lagrange'a lub Eulera) eliminując z nich czas t .

Jeżeli równania ruchu wyrażone są w zmiennych Lagrange'a

$$\begin{aligned}x(t) &= F_1(a, b, c, t) \\y(t) &= F_2(a, b, c, t) \\z(t) &= F_3(a, b, c, t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

w których a, b, c są stałymi, to równania te po wyrugowaniu z nich czasu t stają się równaniami opisującymi tory poszczególnych elementów płynu. Ponieważ czas jest w metodzie Lagrange'a parametrem równań, stąd też często równania Lagrange'a nazywane są parametrycznym opisem torów elementów płynu.

W metodzie Eulera w sposób bezpośredni uzyskujemy informacje o przestrzenno-czasowej zmienności pola prędkości, które opisane jest następującym układem równań:

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, t) \\U_y &= \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z, t) \\U_z &= \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

który przekształcić można do postaci:

$$\frac{dx}{U_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{U_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{U_z(x, y, z, t)} = dt\tag{2.14}$$

Po scałkowaniu tych równań uzyskamy związki:

$$\begin{aligned}x &= F_1(C_1, C_2, C_3, t) \\y &= F_2(C_1, C_2, C_3, t) \\z &= F_3(C_1, C_2, C_3, t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

zależne od stałych, których wartości mogą być określone z warunków początkowych (patrz rozdz. 2.3).

Jeżeli z powyższego układu równań wyeliminujemy zmienną t , wówczas otrzymamy równania toru elementów płynu, które tworzyć będą rodzinę krzywych zależnych od wartości początkowych.

Wprowadzając pojęcie toru elementu stwierdziliśmy, że najczęściej utożsamiamy je z linią barwnika lub trajektorią cząstki zawieszony unosiłonej przez przepływ w niektórych źródłach jako przykład toru elementu płynu podaje się trajektorię dymu wydobywającego się z komina. Tymczasem ten przykład dotyczy szczególnego przypadku toru elementu tzn. tego, który przechodzi przez określony punkt w przestrzeni i dlatego w niektórych podręcznikach

(Bukowski, Saberski et al. White) wprowadza się pojęcie linii wysnutej (streakline) dla zaznaczenia odrębności tego pojęcia.

2.4.2. Linia prądu

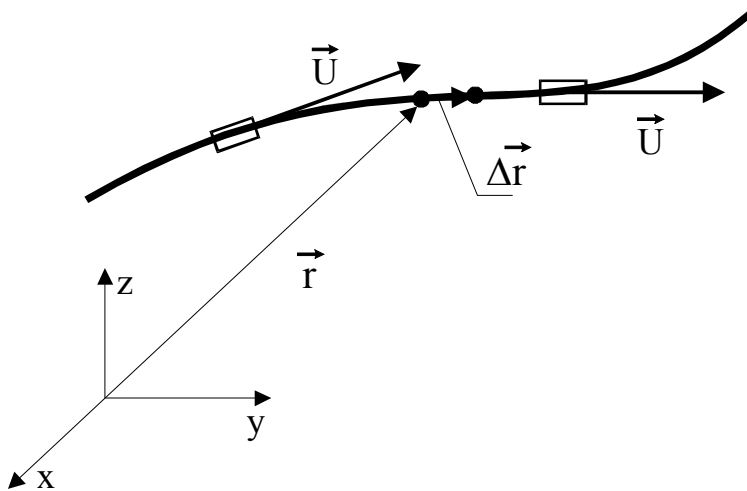
Jeżeli pole przepływu opisujemy w zmiennych Eulera, wówczas dysponując informacją o polu prędkości w każdym punkcie przepływu możemy wprowadzić pojęcie *linii prądu* będącej wektorową linią spełniającą warunek styczności do wszystkich wektorów prędkości elementów płynu położonych na tej linii w danej chwili.

Pojęcie to jest znacznie lepiej dostosowane do specyfiki opisu eulerowskiego, gdyż znane wektory prędkości będą nam wyznaczać kształt linii prądu, której kierunek będzie w każdej chwili zgodny z chwilowym kierunkiem przepływu. Jeżeli przepływ będzie ustalony, co oznacza, że w każdym punkcie przestrzeni wartości i kierunek wektora prędkości będą niezmiennie, wówczas linia prądu będzie tożsama z torem elementu. Dla przepływu nieustalonego te dwie linie będą identyczne, gdyż linia prądu przedstawia spodziewany kształt trajektorii elementu płynu dla pola prędkości występującego w danej chwili, zaś tor elementu płynu to oczekiwana trajektoria, która będzie zakreślona przez tenże element w miarę rozwijania się (zmian) nieustalonego przepływu.

Opis linii prądu wyprowadzić można z rys. 2.4, na którym kropkami oznaczono dwa kolejne położenia elementu płynu zarejestrowane w nieskończenie małym odstępie czasu dt

wzdłuż linii prądu do której styczne są w każdej chwili wektory prędkości \vec{U} . W punkcie wyznaczonym przez wektor \vec{r} wektor prędkości \vec{U} i przemieszczenie $\Delta \vec{r}$ dokonanego w czasie dt są równoległe, co należy zapisać jako:

$$\Delta \vec{r} \times \vec{U} = 0 \quad (2.15)$$



Rys. 2.4. Linia prądu.

Rzuty obydwu wektorów na osie układu współrzędnych są równe:

$$\Delta \vec{r} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

co pozwala zapisać wz. (2.15) będący warunkiem styczności wektora prędkości do linii prądu jako zerowość następującego wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = 0$$

co po rozwinięciu daje:

$$\vec{i} (dy U_z - U_y dz) + \vec{j} (U_x dz - U_z dx) + \vec{k} (dx U_y - U_x dy) = 0$$

i dalej:

$$dy U_z - U_y dz = 0$$

$$dz U_x - U_z dx = 0$$

$$dx U_y - U_x dy = 0$$

Ostatecznie *równanie różniczkowe linii prądu* przybiera postać:

$$\frac{dx}{U_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{U_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{U_z(x, y, z, t)} = 0 \quad (2.16)$$

w której składowe prędkości są funkcjami współrzędnych przestrzeni i czasu, co oznacza, że równanie (2.16) dotyczy przepływu nieustalonego. Dla ruchu ustalonego równanie linii prądu zapisać można jako:

$$\frac{dx}{U_x(x, y, z)} = \frac{dy}{U_y(x, y, z)} = \frac{dz}{U_z(x, y, z)} = 0 \quad (2.17)$$

co daje postać identyczną jak dla równania toru elementu płynu (wz. (2.14)). W ruchu ustalonym wzdłuż tej samej linii prądu porusza się nieskończenie wiele elementów płynu, które zakreślają trajektorię identyczną z torem elementu płynu i linią wysnutą przechodzącą przez dalszy punkt przestrzeni.

Analityczne rozwiązanie równania (2.16), będącego układem dwóch równań różniczkowych możliwe jest poprzez ich scałkowanie, prowadzące do całki ogólnej danej również układem dwóch równań:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, t, C_1, C_2) &= 0 \\ F_2(x, y, z, t, C_1, C_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

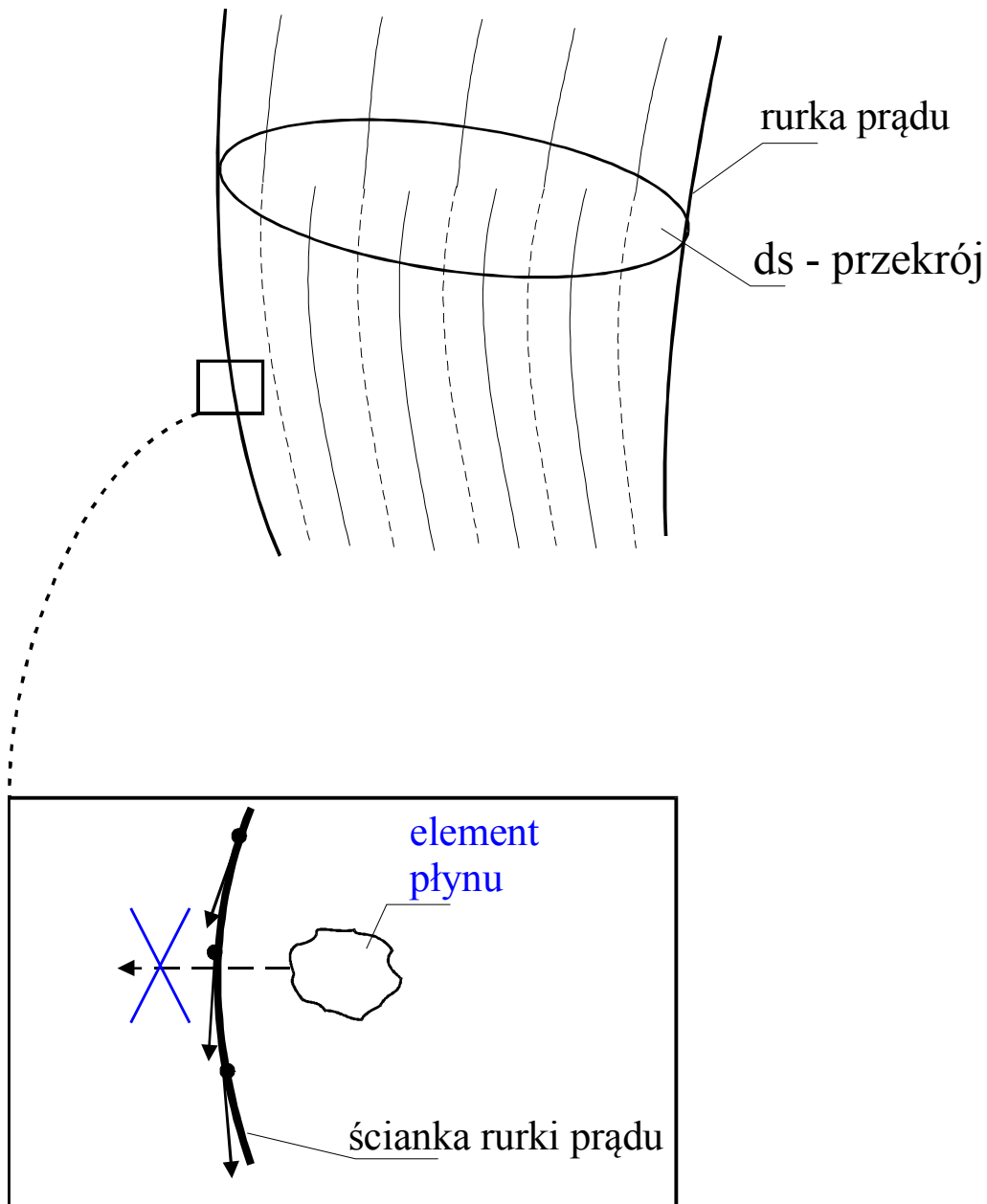
Jeżeli znamy współrzędne punktu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ przez który w chwili t_0 przechodzi linia prądu, wówczas z układu równań (2.18) można wyznaczyć wartości stałych C_1 oraz C_2 , które określają równanie linii prądu, przechodzącej w danej chwili t_0 przez punkt M_0 .

Jeżeli jednak w punkcie M_0 prędkość $\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \\ U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}$ równa jest zeru wówczas jednoznaczne wyznaczenie stałych C_1 i C_2 , nie jest możliwe, gdyż punkt M_0 jest wówczas punktem osobliwym, przez który może przechodzić nieskończenie wiele linii prądu.

2.4.3. Rurka prądu i włókno prądu

Linia prądu stanowi użyteczne pojęcie w analizie prostych przepływów, które sprowadzić można do tzw. zagadnień jednowymiarowych. Załóżmy, że przez każdy punkt zamkniętego konturu otaczającego nieskończenie małe pole dS pokazane na rys. 2.5 poprowadzimy linie prądu, które utworzą powierzchnię zwaną *rurką prądu*. Jednocześnie linie prądu przeprowadzić można przez każdy punkt powierzchni dS i taki zbiór linii prądu nazywamy *włóknem prądu*. Jeżeli płyn przepływać będzie przez powierzchnię dS w ruchu

nieustalonym, wówczas kształt obydwu tych zbiorów będzie zmieniał się i wówczas będziemy mogli mówić o *chwilowej rurce prądu* i *chwilowym włóknie prądu*. Jeżeli będzie to przepływ ustalony, wówczas zarówno kształt rurki jak i włókna prądu będzie niezmienny w czasie i co najważniejsze, zbiory te będą wykazywać własności zbliżone do przepływu w sztywnej rurce. Żadna bowiem linia prądu będąca częścią składową włókna prądu nie będzie mogła przebić rurki prądu, na której to powierzchni utworzonej z linii prądu będą mogły istnieć jedynie składowe styczne prędkości (patrz rys. 2.5). Żaden zatem element płynu, który znalazł się wewnątrz rurki prądu nie może jej opuścić, jeżeli tylko rozpatrywany przepływ jest ustalony (w przepływie nieustalonym zmienny w czasie kształt rurki prądu może w każdej chwili obejmować inne elementy płynu niż te, które były wewnątrz w chwili poprzedzającej). W bardzo uproszczonej analizie, włóknem prądu może być np. przepływ w kanale czy rurce, których ściany mogą być odwzorowane powierzchnią rurki prądu. W tym jednak przypadku musimy zaniedbać zmienność prędkości w poprzecznym przekroju włókna prądu, przyjmując średnią wartość prędkości w całym poprzecznym przekroju dS . Prędkość będzie mogła wówczas zmieniać się tylko wzdłuż długości włókna prądu i stąd nazwa – zagadnienie jednowymiarowe. Można również cały przekrój poprzeczny kanału podzielić na znacznie mniejsze włókna prądu co z jednej strony pozwala na uwzględnienie zmienności prędkości w przekroju poprzecznym kanału, lecz z drugiej strony powoduje to komplikację opisu przepływu.



Rys. 2.5. Rurka prądu i włókno prądu.

2.5. Warunek ciągłości przepływu

Opis pola przepływu uwzględniać musi oczywisty warunek, aby w analizowanym układzie masa płynu nie mogła ginąć ani też nie mogła pojawiać się nowa masa. Najłatwiej wyrazić ten warunek dla przepływu zachodzącego we włóknie prądu, w którym przez każdy kolejny przekrój poprzeczny przepływać musi w jednostce czasu taka sama masa płynu. Jeżeli przez S oznaczymy pole przekroju włókna, a przez U średnią prędkość przepływu, wówczas w każdym dowolnym przekroju włókna spełniony być musi warunek:

$$\rho \cdot S \cdot U = \dot{m} = \text{idem} \quad (2.19)$$

w którym \dot{m} oznacza strumień masy.

Warunek ten musi być spełniony wzdłuż całej długości włókna prądu, co oznacza z kolei, że dla przepływu ustalonego (dla którego kształt włókna prądu jest niezmienny w czasie) włókno prądu nie może się nigdzie kończyć ani zaczynać. Jeżeli rozpatrywana przestrzeń płynu jest

ograniczona, wówczas włókno prądu musi rozciągać się od jednej granicy do drugiej, natomiast w przestrzeni nieograniczonej musi mieć ono długość nieskończoną. Warunek (2.19) nazywany *równaniem ciągłości dla włókna prądu* będzie również spełniony, jeżeli włókno będzie zamknięte. Jeżeli rozpatrywany przepływ będzie ściśliwy, wówczas z samego tylko warunku (2.19) nie będzie można obliczyć prędkości, gdyż w przepływie ściśliwym gęstość płynu zależy od ciśnienia.

Dla przepływów płynów nieściśliwych ($\rho = \text{idem}$) warunek (2.19) daje się uprościć do postaci:

$$S \cdot U = \dot{Q} = \text{idem} \quad (2.20)$$

czyli do warunku stałości strumienia objętości \dot{Q} , której wymiar wynosi:

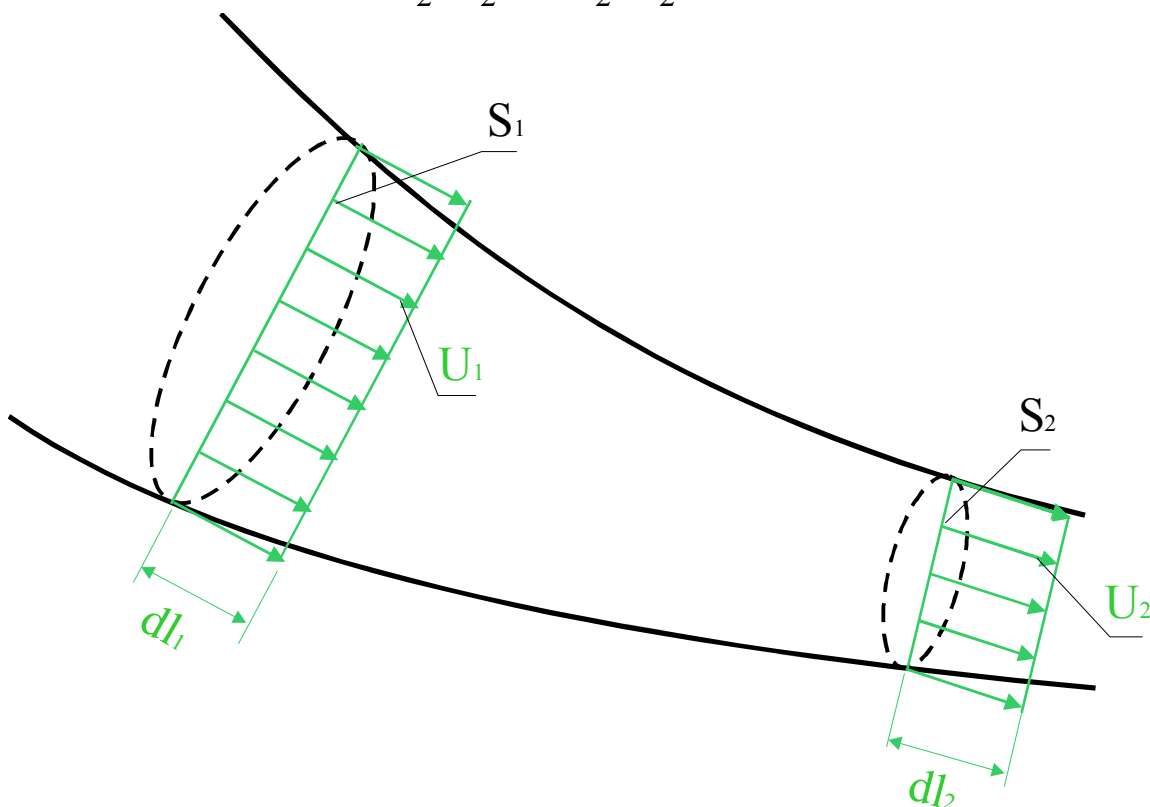
$$\dot{Q} \text{ [m}^3\text{/s]}$$

Warunek ciągłości (2.20) jest szczególnie przydatny w przepływach, które mogą być rozpatrywane jako jedno włókno prądu, co pokazano schematycznie na rys. 2.6. Przez przekrój S_1 w jednostce czasu dt przepływa strumień objętości:

$$S_1 \cdot dl_1 = S_1 \cdot U_1 \cdot dt = \dot{Q}$$

i w przypadku przepływu nieściśliwego identyczny strumień objętości przepływać musi przez przekrój S_2 :

$$S_2 \cdot dl_2 = S_2 \cdot U_2 \cdot dt = \dot{Q}$$



Rys.2.6. Warunek ciągłości dla włókna prądu.

Jeżeli zatem przekroje włókna prądu są tożsame z przekrojami całego przepływu i jeżeli znany jest strumień objętości takiego przepływu, wówczas średnią prędkość przepływu dla każdego przekroju S_i wyliczyć można z warunku (2.20):

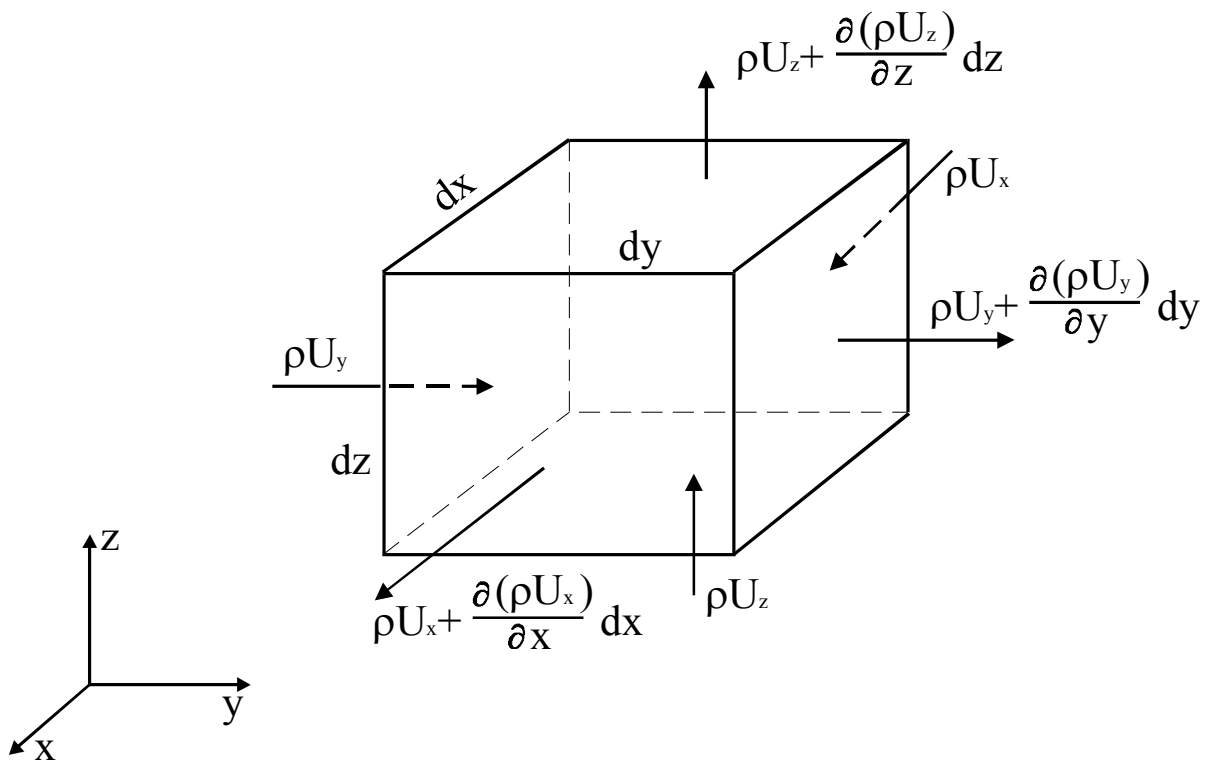
$$S_i \cdot U_i = \dot{Q}$$

Związki (2.19) i (2.20) wystarczają do opisu warunków zachowania masy i objętości ustalonych i nieściśliwych przepływów jednowymiarowych, którym to wymiarem będzie dla włókna prądu odległość od przekroju początkowego, mierzona wzdłuż osi włókna prądu. Nie wszystkie jednak przepływy są aż tak prostymi przypadkami i dlatego też koniecznym jest sformułowanie warunku zachowania masy dla przypadku najbardziej ogólnego tzn. dla przepływu nieustalonego, ściśliwego i trójwymiarowego.

Zastosujemy metodę Eulera, wybierając do analizy elementarną objętość w kształcie prostopadłościanu o wymiarach dx, dy, dz krawędzi równoległych do osi kartezjańskiego układu współrzędnych, jak pokazano na rys. 2.7. Przepływ jest nieustalony i ściśliwy co

oznacza, że jego parametry hydrodynamiczne tzn. prędkość \vec{U} , ciśnienie p i gęstość ρ są funkcjami czasu i współrzędnych przestrzeni:

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}(x, y, z, t) \\ p &= p(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t)\end{aligned}$$



Rys.2.7. Bilans masy w elementarnej objętości.

Ponieważ jest to pierwsze, praktyczne zastosowanie metody Eulera w analizie ruchu płynu, stąd też przyjrzymy się bliżej podstawowym założeniom tej metody. Objętość kontrolna została ulokowana w dowolnym ale ściśle określonym położeniu i w objętości tej rejestrować będziemy zmienność parametrów hydrodynamicznych przepływu. Objętość kontrolna nie może zakłócać przepływu i dlatego też możemy ją sobie wyobrazić jako klatkę wykonaną z nieskończenie cienkich drutów, wyznaczającą granice nadzorowanego przez nas obszaru. Kolejny problem wart rozważenia, to sposób sformułowania warunku zachowania masy w objętości kontrolnej w przypadku, gdy parametry hydrodynamiczne są funkcjami czasu i współrzędnych przestrzeni. Wydawać by się mogło, że warunek zachowania masy w metodzie Eulera należy sformułować jako żądanie, aby masa objętości kontrolnej była

niezmienna w czasie. Jeżeli jednak prędkość i gęstość płynu opuszczającego objętość kontrolną będą różne od wartości tychże parametrów dla płynu wchodzącego do nadzorowanej objętości, wówczas masa zawarta w prostopadłościanie z rys. 2.7 będzie zmieniać się w czasie. Można tu przywołać analogię ze zbiornikiem, w którym zawarta jest pewna objętość płynu i jeżeli tylko zbiornik jest szczelny, wówczas warunek zachowania masy sprowadzi się do niezmienności masy płynu zawartej w tym zbiorniku. Jeżeli jednak zacznie się wypływ, wówczas warunek zachowania masy wymagać będzie uwzględnienia nie tylko płynu znajdującego się w zbiorniku, lecz także i tej masy, która z niego wypływa. W metodzie Eulera warunek zachowania masy należy zatem sformułować następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zmiana masy} \\ \text{w objętości} \\ \text{kontrolnej} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{różnica mas wpływających} \\ \text{i wypływających z} \\ \text{objętości kontrolnej} \end{array} \right\}$$

Załóżmy, że wektor prędkości \vec{U} o składowych

$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

jest skierowany w taki sposób, że płyn wchodzi do objętości kontrolnej przez powierzchnie bliższe początkowi układu współrzędnych, którymi na rys. 2.7 są prostokąty zaznaczone liniami przerywanymi. Rozpatrzmy oddzielnie strumień masy wpływający do objętości kontrolnej w kierunkach zgodnych ze zwrotem osi układu współrzędnych. W kierunku osi x , przez prostokąt o polu $dydz$ w jednostce czasu dt wpływa masa:

$$\rho U_x dydz dt$$

a po uwzględnieniu strumieni masy wpływających wzdłuż wszystkich osi otrzymujemy:

$$\dot{m}_{\text{wpł}} = (\rho U_x dydz + \rho U_y dx dz + \rho U_z dx dy) dt \quad (2.21)$$

Jeżeli jednostkowy strumień masy wpływającej wzdłuż osi x przypadający na jednostkę powierzchni i czasu wynosi:

$$(\rho U_x)$$

to jego zmienność wzdłuż osi x zachodząca na skutek zmian gęstości i prędkości wynosić będzie:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x}$$

Przyrost jednostkowego strumienia masy na powierzchni wpływającej wynosić będzie:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} dx$$

co po pomnożeniu przez pole powierzchni i czas obserwacji i dodaniu strumienia masy wpływającego do objętości kontrolnej da strumień masy wpływającej:

- wzdłuż osi x :

$$\left[(\rho U_x) + \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} dx \right] dy dz dt \quad (2.22a)$$

- wzdłuż osi y :

$$\left[(\rho U_y) + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} dy \right] dx dz dt \quad (2.22b)$$

- wzdłuż osi z :

$$\left[(\rho U_z) + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} dz \right] dx dy dt \quad (2.22c)$$

Różnica strumieni masy wypływającej i wpływającej wynosi:

$$\dot{\Delta m} = \dot{m}_{\text{wypł}} - \dot{m}_{\text{wpl}}$$

po zsumowaniu związków (2.22a ÷ c) i odjęciu wz. (2.21) pozwala zapisać:

$$\dot{\Delta m} = \left[\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (2.23)$$

i różnica ta musi być równa zmianie masy płynu zawartego w objętości kontrolnej. Jeżeli pierwotna masa zawarta w objętości kontrolnej wynosiła

$$\rho dx dy dz$$

to na skutek różnicy mas wypływającej i wpływającej malała ona w tempie:

$$-\frac{\partial(\rho dx dy dz)}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

i po czasie dt zmiana masy w objętości kontrolnej wyniesie:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Zmiana masy w objętości kontrolnej równa być musi różnicy mas wpływającej i wypływającej:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt = \dot{\Delta m}$$

i po uwzględnieniu wz. (2.23) zapisać można:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z}$$

Podstawiając do powyższego równania związki:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} = \rho \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = \rho \frac{\partial U_z}{\partial z} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

oraz uwzględniając wyrażenie opisujące pochodną substancjalną gęstości:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + U_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

otrzymujemy ostateczną postać warunku zachowania masy, nazywanego *równaniem ciągłości nieustalonego przepływu płynu ściśliwego*

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.24)$$

lub w zapisie wektorowym:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \text{div } \vec{U} = 0 \quad (2.24a)$$

Dla ruchu ustalonego płynu ściśliwego zerową wartość przyjmuje pochodna lokalna gęstości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

i równanie ciągłości ustalonego ruchu płynu ściśliwego zapisać można:

$$\frac{\partial(\rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

lub:

$$\operatorname{div} \left(\rho \vec{U} \right) = 0 \quad (2.25a)$$

Jeżeli rozpatrywać będziemy ustalony przepływ nieściśliwy, wówczas:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

i równanie ciągłości ustalonego ruchu płynu nieściśliwego przyjmie postać:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.26)$$

lub w postaci wektorowej:

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (2.26a)$$

Równanie ciągłości musi być spełnione w każdym przepływie i dlatego też opis ruchu płynu zawierać musi jeden z wyprowadzonych tu warunków (2.24), (2.25) lub (2.26) odpowiedni dla rozpatrywanego przypadku. Wyprowadzając równanie ciągłości nie czyniliśmy też jakichkolwiek założeń dotyczących występowania lub braku lepkości i dlatego też równanie ciągłości obowiązywać będzie zarówno dla przepływów płynów nielepkich jak i lepkich.

3. Równania ruchu płynu

Równania ruchu płynu, podobnie jak w mechanice ciała stałego, są wyprowadzone z drugiej zasady Newtona, która dla ciała o masie m zmieniającego prędkość z \vec{U}_1 w chwili t_1 do prędkości \vec{U}_2 w chwili t_2 , pozwala obliczyć siłę \vec{F} niezbędną do wywołania tej zmiany:

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m \vec{U}_2 - m \vec{U}_1 \quad (3.1)$$

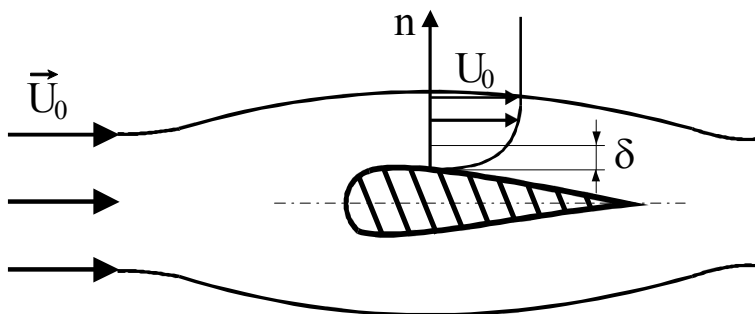
Iloczyn masy i prędkości jest wielkością wektorową nazywaną *pędem*, zaś iloczyn siły i czasu jej działania nazywany jest *popędem siły*, co pozwala wyrazić drugą zasadę dynamiki w następującej postaci:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{popęd} \\ \text{siły} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{zmiana} \\ \text{pędu} \\ \text{układu} \end{array} \right\} \quad (3.1a)$$

Jeżeli założymy, że rozpatrywać będziemy zmiany zachodzące w nieskończenie małym czasie, wówczas drugą zasadę dynamiki, po obustronnym podzieleniu wz. (3.1) przez czas wyrazić będzie można następująco:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{siła bezwładności} \\ \text{przyspieszanego} \\ \text{elementu płynu} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{suma sił zewnętrznych} \\ \text{działających na} \\ \text{element płynu} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Siłami zewnętrznymi są siły ciężkości (należące do grupy sił masowych) oraz siły pochodzące od ciśnienia i siły lepkości, które są siłami powierzchniowymi.



Rys.3.1. Ilustracja wpływu lepkości na obraz opływu profilu.

Wszystkie płyny są ośrodkami lepкими, jednak nie we wszystkich przepływach lepkość jest jednakowo istotna. Narysujmy rozkład prędkości wokół profilu pokazanego na rys. 3.1, który zanurzony jest w płynie poruszającym się z prędkością \vec{U}_0 równoległe do osi symetrii profilu. Lepkość powoduje, że na powierzchni profilu prędkość jest zerowa, gdyż istnienie adhezji płynu sprawia, że molekuly płynu położone w bezpośrednim sąsiedztwie ściany muszą mieć prędkość zerową. Jeżeli oddalamy się od ściany (kierunek n na rys. 3.1) wówczas prędkość rośnie w sposób określony lepkością płynu, tzn. dla płynów o mniejszej lepkości gradient prędkości $\frac{\partial U}{\partial n}$ może być większy niż dla ośrodka o lepkości większej.

Grubość warstwy płynu oznaczona na rys. 3.1 symbolem δ , w której na skutek lepkości istnieje niezerowy gradient prędkości:

$$\frac{\partial U}{\partial n} \neq 0$$

wyznacza granicę tzw. *warstwy przyściennej*, w której lepkość odgrywa istotną rolę. Grubość warstwy przyściennej jest jednak zazwyczaj niewielka i przykładowo na powierzchni łopatki wentylatora czy turbiny gazowej lub parowej wymiar ten jest rzędu:

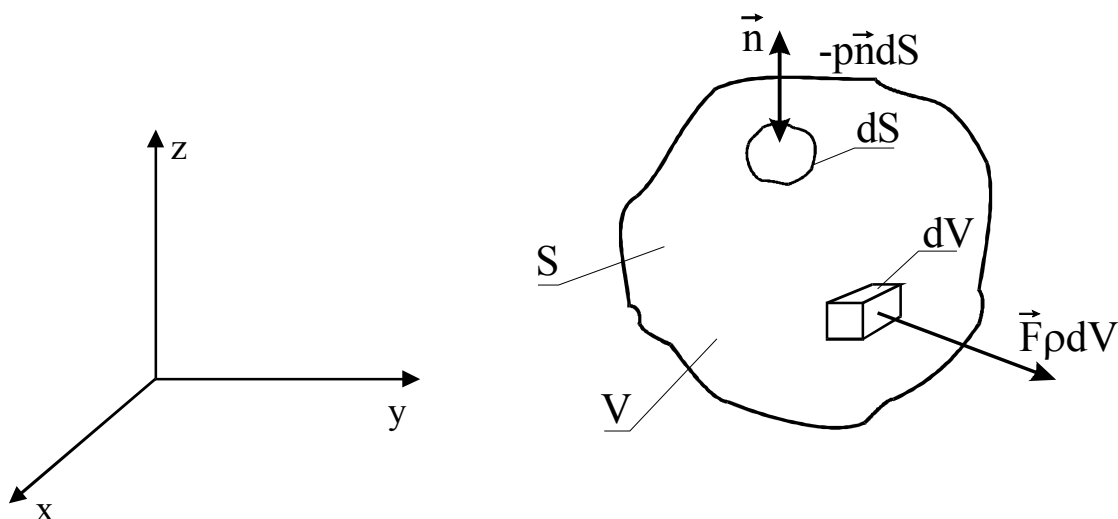
$$\delta \approx 1 \text{ mm}$$

a przy opływie wody wokół kadłuba statku o długości kilkuset metrów grubość δ jest co najwyżej rzędu kilkudziesięciu centymetrów. Oznacza to, że kształt linii prądu położonych w odległości większej niż δ od powierzchni ciała może być wyznaczony bez uwzględnienia lepkości płynu. Pominięcie lepkości w równaniach ruchu upraszcza obliczenia i dlatego też, w przybliżonej analizie wielu zagadnień stosuje się opis ruchu dla tzw. *płynu idealnego* (nielepkiego). Ponadto, ze względów dydaktycznych łatwiej jest wyprowadzić równanie ruchu dla płynu nielepkiego a następnie wprowadzić do niego siły lepkości i ten sposób postępowania zostanie zastosowany w niniejszym rozdziale.

3.1. Równanie ruchu płynu idealnego – równanie Eulera

Do sformułowania opisu ruchu płynu idealnego zastosujemy metodę Eulera wyodrębniając z całej objętości płynu V jego element dV (rys. 3.2) i elementarną powierzchnię dS . Na rozpatrywany płyn działa jednostkowa siła masowa, której składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych zapisać można:

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$



Rys.3.2. Siły masowe i powierzchniowe działające na element płynu idealnego.

Na element płynu o objętości dV działa siła masowa

$$\vec{F} \cdot \rho \cdot dV$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, a całkowita siła masowa działająca na objętość V rozpatrywanego płynu wynosi:

$$\int_V \vec{F} \cdot \rho \cdot dV \quad (3.3a)$$

W płynie idealnym nie występują składowe styczne sił powierzchniowych i dlatego na każdy element powierzchni płynu działa wektor siły normalnej, skierowany przeciwnie do zwrotu osi \vec{n} , co pozwala zapisać:

$$\vec{p} = -p \cdot \vec{n}$$

gdzie p jest ciśnieniem w danym punkcie powierzchni S . Elementarna siła powierzchniowa wynosi:

$$\vec{p} \cdot dS$$

a całkowita siła powierzchniowa będzie równa:

$$\int_S \vec{p} \cdot dS$$

Siły zapisane zależnościami (3.3a) i (3.3b) są jedynymi siłami zewnętrznymi występującymi w płynie idealnym i dla kompletności równania (3.2) potrzebna jest jedynie siła bezwładności, która dla elementarnej objętości zapisana być może:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} \cdot \rho \cdot dV$$

Całkowita siła bezwładności będzie równa:

$$\int_V \frac{D\vec{U}}{Dt} \rho \cdot dV \quad (3.3c)$$

i po uwzględnieniu w równ. (3.2) związków (3.3a), (3.3b) i (3.3c) otrzymamy:

$$\int_V \left(\vec{F} - \frac{D\vec{U}}{Dt} \right) \rho dV + \int_S \vec{p} \cdot dS = 0$$

Całkowanie powyższego związku wymaga przekształcenia całki powierzchniowej w objętościową z wykorzystaniem przekształcenia Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\int_S \vec{p} \cdot dS = \int_S p \vec{n} \cdot dS = - \int_V \text{grad } p dV$$

co pozwala zapisać:

$$\int_V \left(\vec{F} - \frac{D\vec{U}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \rho dV = 0$$

Objętość V została wybrana w sposób całkowicie dowolny, co oznacza, że związek powyższy zachowuje ważność w każdym punkcie płynu, co pozwala zapisać:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (3.4)$$

Zależność powyższa to *równanie ruchu płynu idealnego* nazywane również *równaniem Eulera dla płynu idealnego*, które wiąże ze sobą jednostkową siłę masową \vec{F} , gradient ciśnienia w danym punkcie płynu z gęstością ρ i przyspieszeniem $\frac{D\vec{U}}{Dt}$ działającym na dany element płynu.

Równanie (3.4) zapisać można dla kartezjańskiego układu współrzędnych jako układ trzech równań skalarnych:

$$\begin{aligned}\frac{DU_x}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{DU_y}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{DU_z}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.5)$$

a po rozwinięciu wyrażen na pochodne substancjalne uzyskamy następującą *postać równania Eulera dla przepływu niestacjonarnego płynu idealnego*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Jeżeli ograniczymy rozważania do przepływów ustalonych, wówczas związek powyższy można uprościć otrzymując *równanie Eulera dla przepływu ustalonego płynu idealnego*:

$$\begin{aligned}U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.7)$$

W związkach (3.6) i (3.7) nie nakładaliśmy żadnych ograniczeń na gęstość płynu i stąd też równanie Eulera jest ważne zarówno dla przepływu ściśliwego jak i nieściśliwego.

3.2. Metodyka rozwiązywania równania Eulera

Równanie Eulera będące opisem ruchu płynu idealnego

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (3.4)$$

jest bilansem równowagi sił działających na element płynu i nazywane jest z tego powodu *warunkiem dynamicznym możliwości przepływu*. W równaniu tym zapisanym w kartezyjskim układzie współrzędnych występuje pięć niewiadomych:

$$U_x, U_y, U_z, p, \rho$$

podczas gdy równanie Eulera, zapisane w postaci skalarnej to tylko trzy równania, wiążące ze sobą niewiadome dane powyższym związkiem. Każdy jednak przepływ spełniać musi równanie ciągłości:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \text{div } \vec{U} = 0$$

które to równanie nazywane jest również *warunkiem kinetycznym możliwości przepływu*, stanowiącym czwarte równanie układu opisującego ruch płynu. Do zamknięcia układu równań (rozumianego jako zrównanie liczby równań i niewiadomych) potrzebny jest jeszcze jeden warunek, którym jest *równanie stanu* opisujące zmienność gęstości płynu.

Najprostszą postacią tego związku można się posłużyć w przypadku opisu ruchu cieczy, dla której można przyjąć, że gęstość nie zależy od ciśnienia i temperatury, co pozwala zapisać piątą, brakujące równanie w postaci:

$$\rho = \text{idem} \quad (3.8a)$$

Równanie powyższe nie może być równaniem stanu dla gazów, wśród których wydzielić należy dwie odrębne klasy. Pierwszą z nich tworzyć będą *płyny barotropowe dla których gęstość zależy tylko od ciśnienia*, czyli:

$$\rho = f(p) \quad (3.9)$$

Dla płynów barotropowych o własnościach zbliżonych do gazu doskonałego, który w całym rozważanym przepływie będzie miał stałą temperaturę, równanie stanu będzie równaniem *przemiany izotermicznej*:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (3.8b)$$

Jeżeli natomiast w przepływie płynu barotropowego przemiany zachodzą przy stałej wartości ciepła właściwego, wówczas równaniem stanu będzie *równanie przemiany politropowej*:

$$\frac{p}{\rho^m} = \text{const} \quad (3.8c)$$

w której to zależności m jest wielkością stałą nazywaną *wykładnikiem politropy*.

Drugą klasą płynów są tzw. *płyny baroklinowe, dla których gęstość nie jest wyłącznie funkcją ciśnienia lecz zależy także od innych parametrów, np. temperatury*:

$$\rho = f(p, T, \dots) \quad (3.10)$$

W przepływach płynów baroklinowych wymiana ciepła z otoczeniem jest utrudniona z dwóch przynajmniej powodów. Po pierwsze współczynnik przejmowania ciepła dla gazów jest z reguły niewielki (znacznie mniejszy niż np. dla cieczy) a po drugie występujące w praktyce przepływy charakteryzują się dużymi prędkościami, co sprawia, że efektywny czas wymiany ciepła z jednostką powierzchni jest krótki. Obydwa te czynniki uzasadniają możliwość założenia, że przepływ może odbywać się bez wymiany ciepła z otoczeniem i w tym przypadku równaniem stanu jest *równanie przemiany adiabatycznej*:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad (3.8d)$$

Ruch płynu idealnego będzie zatem opisany układem trzech równań Eulera wz. (3.4), równaniem ciągłości wz. (2.24a) oraz jednym z czterech możliwych równań stanu wz. (3.8), z których należy wyznaczyć rzuty wektora prędkości U_x, U_y, U_z , ciśnienie p i gęstość ρ . Konieczne będzie zatem scałkowanie równań Eulera i ciągłości, w wyniku którego rozwiązanie zawierać będzie stałe całkowania i dowolne funkcje. Dla wyznaczenia tych wielkości niezbędne będą dodatkowe warunki, które muszą być spełnione aby przepływ był jednoznacznie określony.

Po pierwsze spełnione muszą być *warunki początkowe*, które mogą być przyjęte w danej chwili przyjmowanej jako początkowa, tzn. dla $t=0$ muszą być znane wartości składowych prędkości:

$$U_{x0} = U_x(x, y, z, 0)$$

$$U_{y0} = U_y(x, y, z, 0)$$

$$U_{z0} = U_z(x, y, z, 0)$$

oraz ciśnienie:

$$p_0 = p(x, y, z, 0)$$

co pozwala także wyznaczyć z równania stanu gęstość w chwili początkowej:

$$\rho_0 = \rho(x, y, z, 0)$$

Rozwiązanie spełniać musi także warunki brzegowe zarówno kinematyczne jak i dynamiczne.

Kinematyczny warunek brzegowy dotyczy rozkładu prędkości na sztywnej, nieruchomej ścianie ograniczającej przepływ. Jeżeli w każdym punkcie ściany wektor prędkości rozłożymy na składowe – normalną U_n oraz styczną U_s :

$$\vec{U} = U_n \vec{n} + U_s \vec{s}$$

gdzie:

\vec{n}, \vec{s} - wektory jednostkowe odpowiednio normalny i styczny do powierzchni, wówczas dla sztywnej nieprzepuszczalnej ściany stycznej musi być spełniony warunek:

$$U_n = 0$$

Jeżeli kształt sztywnej ściany dany będzie równaniem:

$$f(x, y, z) = 0$$

wówczas w każdym punkcie tej powierzchni przepływ odbywać się będzie tylko w kierunku stycznym. Składowa normalna prędkości związana będzie z niewiadomymi składowymi prędkości U_x, U_y, U_z następującym związkiem:

$$U_n = U_x \cos(\vec{n}, \vec{i}) + U_y \cos(\vec{n}, \vec{j}) + U_z \cos(\vec{n}, \vec{k}) \quad (3.11)$$

a dla spełnienia kinematycznego warunku brzegowego konieczne będzie, aby składowe prędkości były związane następującym związkiem:

$$U_n = U_x \cos(\vec{n}, \vec{i}) + U_y \cos(\vec{n}, \vec{j}) + U_z \cos(\vec{n}, \vec{k}) = 0 \quad (3.11)$$

Kosinusy kierunkowe występujące w powyższym równaniu wyliczyć można następująco:

$$\cos(\vec{n}, \vec{i}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{j}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

i po podstawieniu ich do warunku zerowości składowej prędkości normalnej do ściany (wz. (3.11)) uzyskujemy ostateczną postać kinematycznego warunku brzegowego:

$$U_x \frac{\partial f}{\partial x} + U_y \frac{\partial f}{\partial y} + U_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

Dynamiczny warunek brzegowy dotyczy rozkładu prędkości i wartości ciśnienia na swobodnej powierzchni płynu, której kształt dany jest równaniem:

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (3.13)$$

Zakładając, że swobodna powierzchnia jest nieruchoma możemy zapisać następujący warunek brzegowy:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + U_x \frac{\partial F}{\partial x} + U_y \frac{\partial F}{\partial y} + U_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

który musi być uzupełniony dodatkowymi warunkami dotyczącymi ciśnienia, które na swobodnej powierzchni musi być po pierwsze niezmiennie, a po drugie równe ciśnieniu otoczenia p_a , co można zapisać:

$$p(x, y, z, t) = p_a = \text{const} \quad (3.15)$$

Podane w tym rozdziale przykłady warunków brzegowych nie wyczerpują wszystkich możliwych sytuacji, takich jak np. swobodna powierzchnia z nałożonymi falami powierzchniowymi, dla której należy założyć równość przemieszczenia swobodnej powierzchni i elementów płynu znajdujących się w bezpośredniej bliskości tej powierzchni. Dodatkowe modyfikacje warunków brzegowych będą konieczne w przypadku swobodnej powierzchni z falami powierzchniowymi dla warstwy płynu o niewielkiej głębokości, w której potrzebne jest nałożenie dodatkowego warunku o zerowej wartości składowej pionowej prędkości płynu (wymuszonej falowaniem) na powierzchni dna.

Odrębną grupę warunków brzegowych stanowią zależności, które muszą być spełnione dla powierzchni nieciągłości oddzielających dwa nie mieszające się płyny.

Należy tu również zwrócić uwagę, że równanie Eulera jest nieliniowe, a występujące w nim niewiadome są funkcjami współrzędnych przestrzeni i czasu, co znacznie komplikuje całkowanie tych równań. Zagadnienia te wykraczają jednak poza zakres podstawowego wykładu mechaniki płynów i są przedmiotem odrębnego działu mechaniki płynów zwanego CFD od angielskiego określenia *Computational Fluid Dynamics*.

3.3. Równanie ruchu płynu lepkiego – równanie Navier-Stokesa.

Równanie Eulera dla płynu idealnego zapisane w poprzednim rozdziale w postaci:

$$\frac{D \vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (3.4)$$

wyraża warunek równowagi sił bezwładności, masowych i ciśnieniowych. Jeżeli w opisie ruchu płynu uwzględnimy lepkość, wówczas w równ. (3.4) zamiast sił ciśnieniowych występować będzie siła powierzchniowa \vec{P} , która zawierać będzie zarówno składową normalną P_n jak i styczną P_s :

$$\vec{P} = P_n \vec{n} + P_s \vec{s}$$

Uwzględnienie tego związku pozwala zapisać wz. (3.4) w zmodyfikowanej postaci:

$$\rho \frac{D \vec{U}}{Dt} = \rho \vec{F} + \vec{P} \quad (3.16)$$

Składowe normalną i styczną siły powierzchniowej wyrażamy przez naprężenia, czyli siły odniesione do jednostki powierzchni zgodnie z następującą konwencją:

$$P_n = \sigma_n \cdot S$$

$$P_s = \tau_{ns} \cdot S$$

W oznaczeniach naprężeń normalnych σ_n indeks n oznacza kierunek normalny do powierzchni S , a indeksy naprężeń stycznych τ_{ns} oznaczają odpowiednio kierunek

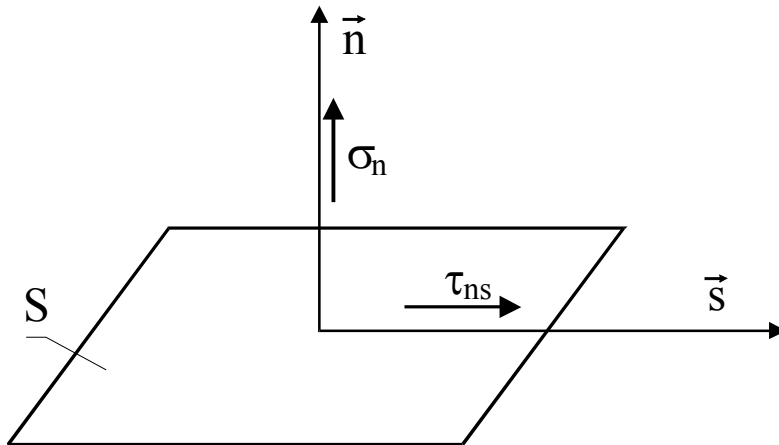
normalny \vec{n} do powierzchni S oraz kierunek \vec{s} wzdłuż którego działają naprężenia styczne, co pokazano na rys. 3.3.

Jeżeli rozważać będziemy opis równowagi elementu płynu w kartezjańskim układzie współrzędnych, wówczas siłę powierzchniową występującą we wz. (3.16) zapisać będziemy mogli następująco:

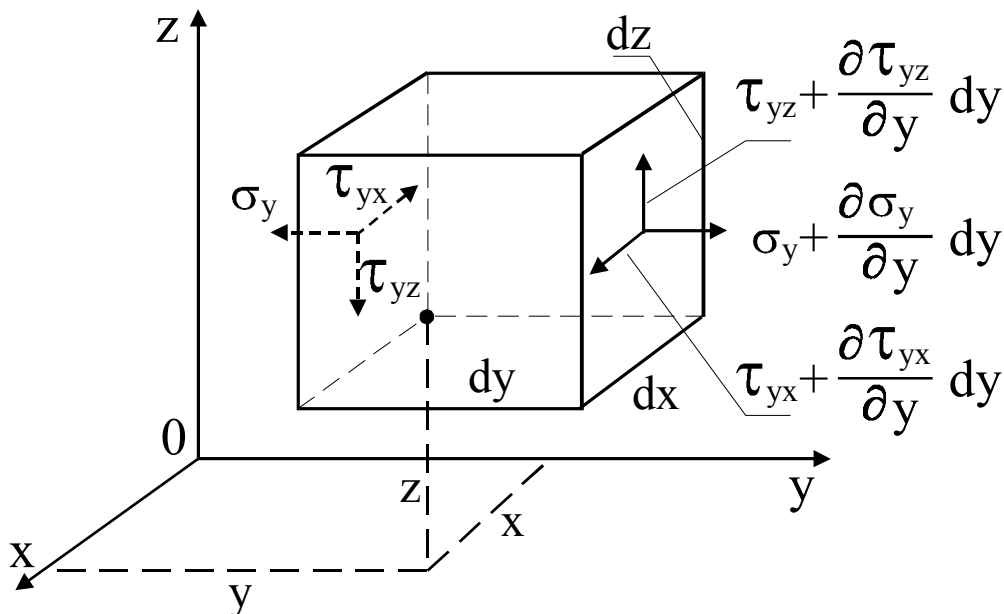
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} \quad (3.17)$$

Rozważmy stan naprężeń działających na powierzchni, do których prostopadła jest oś układu współrzędnych, jak pokazano na rys. 3.4. Rozpatrywany element płynu poddany jest ścisłaniu przez elementy otaczające i stąd też naprężenia normalne σ będą przedstawiać reakcję elementu płynu na otoczenie i będą one skierowane na zewnątrz. Na powierzchnię $dx dz$ działać będą naprężenia τ_{yx} i τ_{yz} , które wzdłuż osi y będą wykazywać przyrost (gradient) równy odpowiednio:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} ; \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$



Rys.3.3. Ilustracja przyjętej konwencji oznaczeń dla naprężeń normalnych i stycznych.



Rys.3.4. Naprężenia działające na powierzchni prostopadłe do osi y .

Jeżeli na równoległe powierzchnie działać będą naprężenia o różnej wartości, wówczas dla obserwatora znajdującego się wewnątrz elementu płynu efektywne naprężenia będą skierowane przeciwnie, podobnie jak miałyby to miejsce w przypadku różnicy prędkości. Jeżeli założymy, że gradienty naprężeń są dodatnie, wówczas będziemy mogli przedstawić naprężenia działające na ścianę bliższą początkowi układu współrzędnych jako skierowane

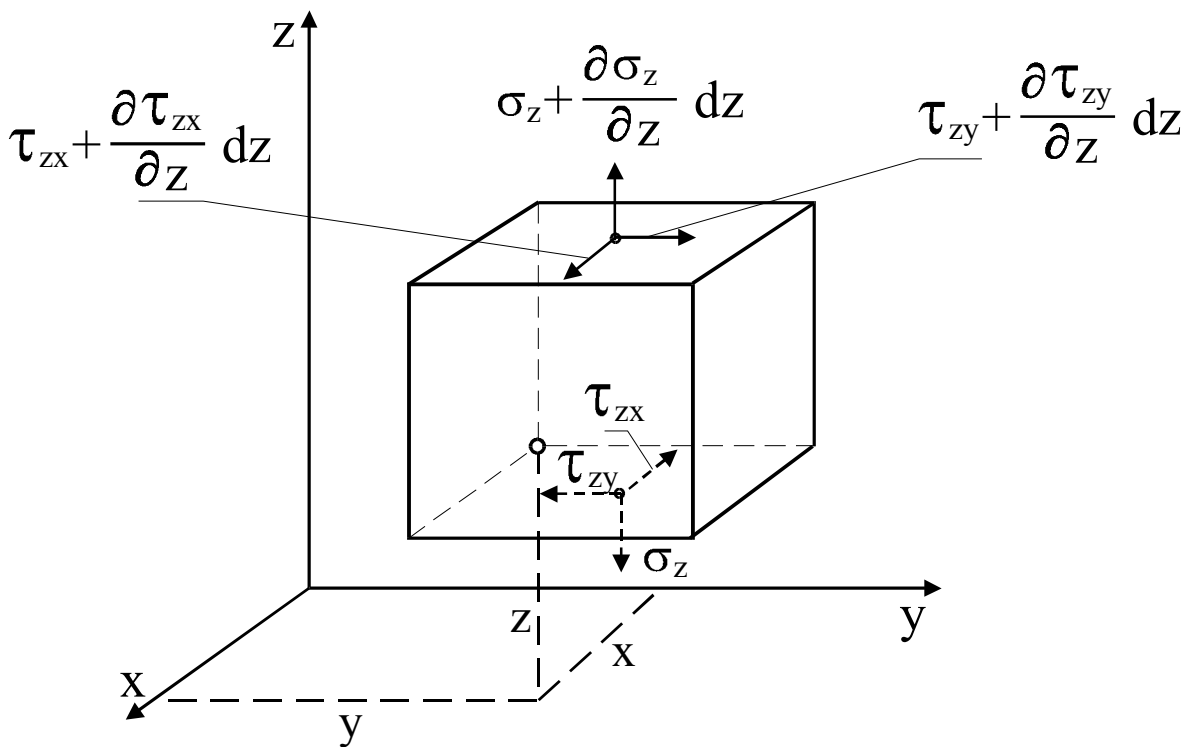
przeciwnie do zwrotu osi. Przyjmując tę konwencję, naprężeniom stycznym działającym na powierzchnię $dx dz$ oddaloną o dy wzdłuż osi y przyporządkujemy zwroty zgodne z kierunkami osi układu współrzędnych jak zaznaczono na rys. 3.4.

Podobne rozumowanie przeprowadzić można dla naprężeń działających na powierzchnie, do których prostopadłe są odpowiednio osie z (rys. 3.5) oraz x (rys. 3.6) i wówczas możliwe będzie napisanie warunku równowagi dla sił powierzchniowych w postaci rzutów naprężeń na odpowiednie kierunki przyjętego układu współrzędnych. Przykładowo, suma sił powierzchniowych działających wzdłuż kierunku x zapisana będzie następująco:

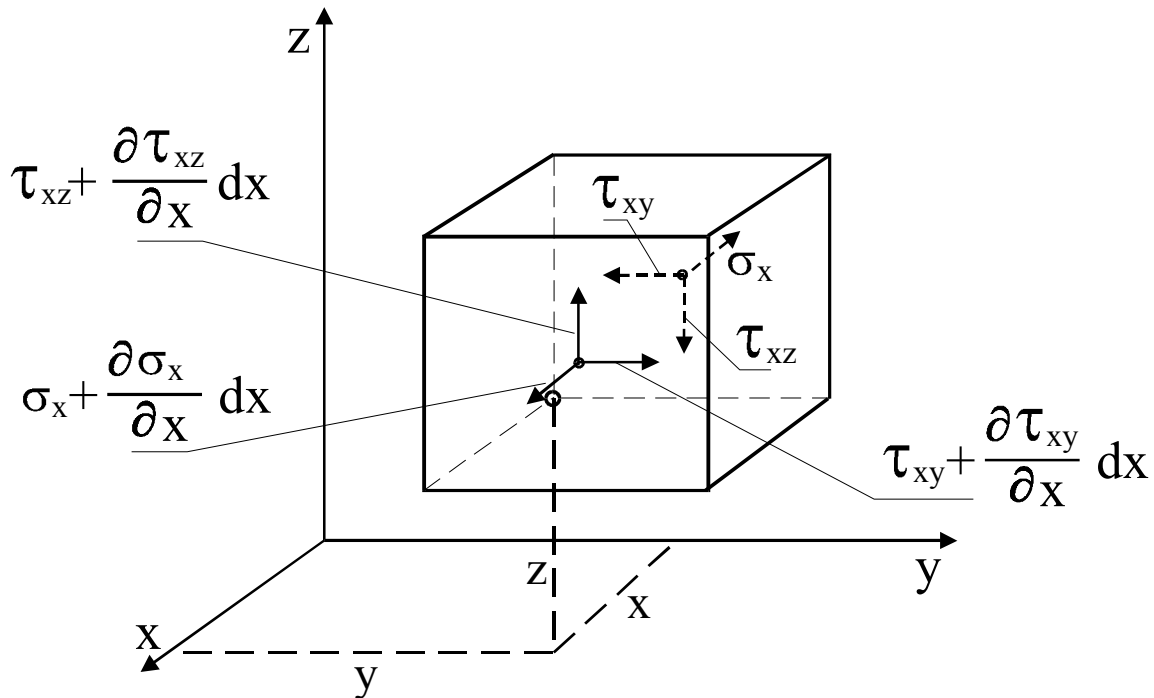
$$\begin{aligned}
 & -\sigma_x dy dz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dy dx + \\
 & + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\
 & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dy dx
 \end{aligned}$$

a po wykonaniu elementarnych przekształceń przybierze ona postać:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$



Rys.3.5. Naprężenia działające na powierzchnie prostopadłe do osi z .



Rys.3.6. Naprężenia działające na powierzchnie prostopadłe do osi x .
Związek powyższy można przekształcić do postaci przedstawiającej siłę powierzchniową odniesioną do jednostki objętości, co po uwzględnieniu zw. (3.17) pozwoli zapisać:

$$P_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

oraz przez analogię dla pozostałych kierunków:

$$P_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$P_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności we wzorach (3.16) oraz (3.17) równanie ruchu płynu lepkiego zapisać można w postaci rzutów na osie układu współrzędnych:

$$\begin{aligned} \frac{DU_x}{Dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{DU_y}{Dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{DU_z}{Dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Występujące w równ. (3.18) naprężenia stanowią nowe niewiadome, których obliczenie wymagałoby wprowadzenia nowych równań. Znacznie prostszym wyjściem będzie jednak wyrażenie niewiadomych naprężeń przez znane już zależności opisujące deformacje płynu. Naprężenia normalne σ będą bowiem wywoływać odkształcenia objętościowe ε a naprężenia styczne τ wywoływać będą odkształcenia postaciowe λ , przy czym naprężenia te zdefiniowano w rozdziale 2.6 w sposób następujący:

- odkształcenia objętościowe:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial U_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.35}$$

- odkształcenia postaciowe:

$$\begin{aligned}\lambda_{xy} = \lambda_{yx} &= \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \\ \lambda_{yz} = \lambda_{zy} &= \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ \lambda_{xz} = \lambda_{zx} &= \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{2.36}$$

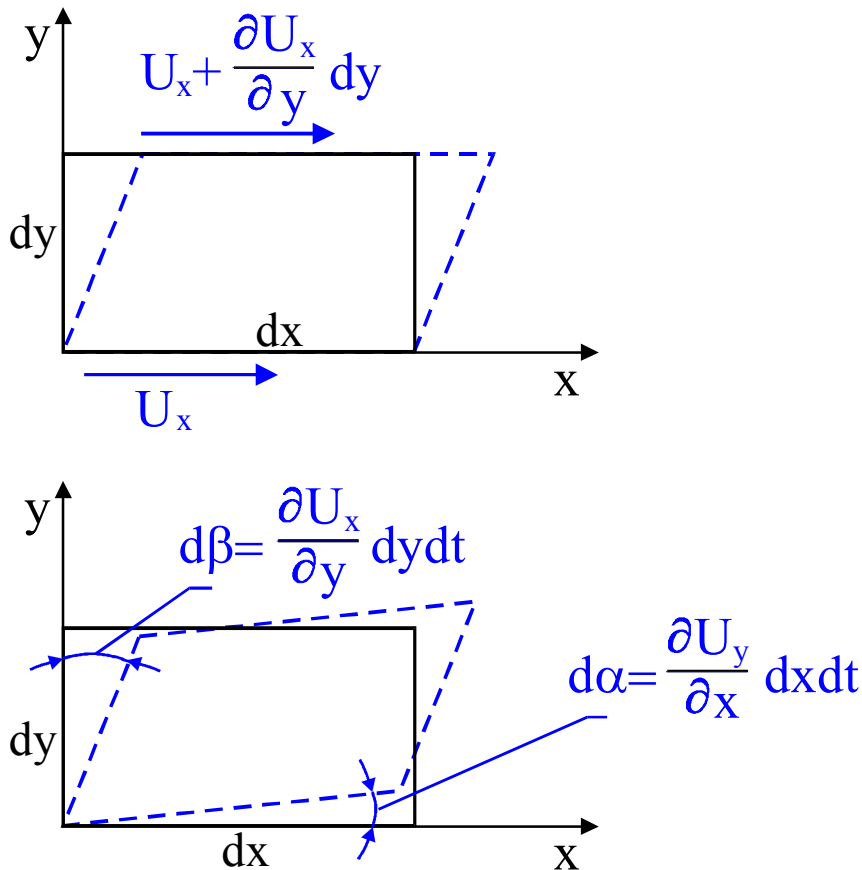
Stosunkowo prostym zagadnieniem jest powiązanie naprężeń stycznych τ z deformacjami postaciowymi λ , dla powiązania których punktem wyjścia może być prawo Newtona, które w rozdziale 1 zostało podane w postaci:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}\tag{1.7}$$

z której wynika, że współczynnikiem proporcjonalności między naprężeniami stycznymi i gradientem prędkości jest współczynnik lepkości μ . Pozwala to zapisać naprężenia styczne występujące we wz. (3.18) w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Powstaje oczywiste pytanie, czy ten sam stosunek proporcjonalności zachodzić będzie między naprężeniami i prędkością deformacji kątowej jak pokazano na rys. 3.7.



Rys.3.7. Odkształcenie postaciowe elementu płynu jako deformacja kąta między ścianami.

Deformacja kąta prostego utworzonego przez ściany elementu płynu jest sumą deformacji:

$$d\alpha + d\beta$$

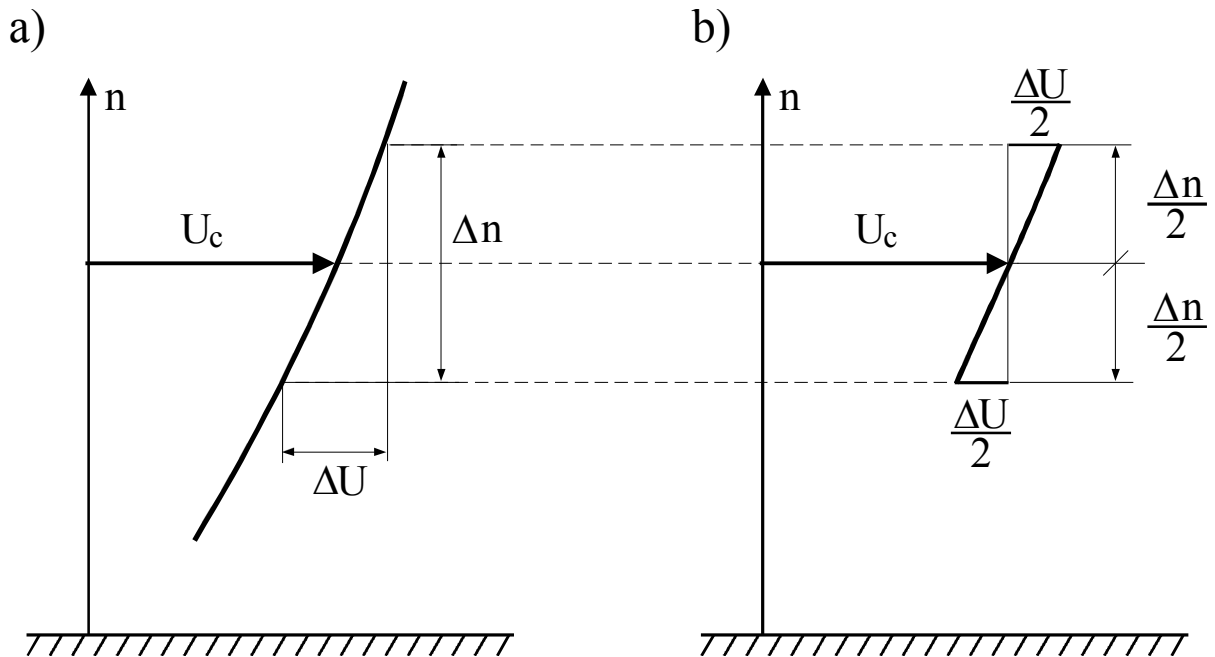
i dlatego można wprowadzić pojęcie średniej prędkości odkształcania kąowego:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{xy})_{\text{sr}} = (\lambda_{yx})_{\text{sr}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \\
 (\lambda_{yz})_{\text{sr}} = (\lambda_{zy})_{\text{sr}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \\
 (\lambda_{xz})_{\text{sr}} = (\lambda_{zx})_{\text{sr}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

i wówczas współczynnik proporcjonalności naprężeń do średniej prędkości odkształcania wyniesie:

$$\tau = 2\mu \lambda_{\text{sr}} \tag{3.21}$$

gdyż tylko w tym przypadku otrzymamy zależności (3.19) o postaci zgodnej z prawem Newtona. Zgodnie z tą konwencją, w prawie Newtona zapisanym jak we wz. (1.7), gradient prędkości $\frac{\partial U}{\partial n}$ stanowi podwojoną różnicę prędkości średniej dla obserwatora znajdującego się w środku elementu płynu i poruszającego się z prędkością U_C (patrz rys. 3.8).



Rys.3.8. Ilustracja prędkości deformacji w nieruchomym układzie odniesienia a) oraz widzianej przez obserwatora poruszającego się z płynem b).

W tym przypadku prawo Newtona należałoby zapisać w postaci:

$$\tau = 2\mu \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} = \mu \frac{\partial U}{\partial n}$$

wskazującej, że przyjęcie współczynnika proporcjonalności 2μ daje prawo Newtona określone postacią (1.7).

W przypadku naprężeń normalnych σ występujących we wz. (3.18) zakładamy, że w przypadku płynu nielepkiego byłyby one równe ciśnieniu, tzn.:

$$\sigma_x = -p$$

$$\sigma_y = -p$$

$$\sigma_z = -p$$

W płynie lepkiem naprężenia normalne byłyby sumą ciśnienia i dodatkowych naprężeń wywołanych lepkością:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x$$

$$\sigma_y = -p + \sigma'_y \tag{3.22}$$

$$\sigma_z = -p + \sigma'_z$$

przy czym naprężenia te musiałyby spełniać definicyjną zależność:

$$\frac{\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z}{3} = -p \tag{3.22}$$

gdyż w każdym punkcie płynu lepkiego musiała by istnieć określona wartość ciśnienia. Innymi słowy zakładamy, że dodatkowe naprężenia $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ dają sumę zerową, a ponieważ pochodzą one od lepkości, stąd też należy założyć, że współczynnik proporcjonalności tychże naprężeń od odkształceń będzie identyczny jak w przypadku naprężeń stycznych, co pozwoli zapisać:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= 2\mu \varepsilon_x \\ \sigma'_y &= 2\mu \varepsilon_y \\ \sigma'_z &= 2\mu \varepsilon_z\end{aligned}\tag{3.23}$$

Zależność powyższa słuszna jest dla płynów nieściśliwych, gdyż założyliśmy, że dodatkowe naprężenia dają sumę zerową:

$$\begin{aligned}\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z &= 2\mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \\ &= 2\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 2\mu \operatorname{div} \vec{U} = 0\end{aligned}$$

co oznacza, że wobec zerowości diwergencji wektora prędkości

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0$$

że musi to być płyn nieściśliwy.

Jeżeli zal. (3.22) miałyby być ważna dla przypadku ogólnego tzn. także i dla płynów ściśliwych, wówczas zal. (3.22) należy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + 2\mu \varepsilon_x + \lambda \operatorname{div} \vec{U} \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \varepsilon_y + \lambda \operatorname{div} \vec{U} \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \varepsilon_z + \lambda \operatorname{div} \vec{U}\end{aligned}\tag{3.24}$$

gdzie człon

$$\lambda \operatorname{div} \vec{U}$$

oznacza dodatkowe naprężenia proporcjonalne do jednostkowej zmiany objętości $\operatorname{div} \vec{U}$ płynu ściśliwego. Współczynnik proporcjonalności λ jest niewiadomy i należy go określić z warunku (3.22), który musi być spełniony także i dla płynów ściśliwych, co po podstawieniu (3.24) do (3.22) pozwala zapisać:

$$\frac{1}{3} \left[-3p + 2\mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + 3\lambda \operatorname{div} \vec{U} \right] = -p$$

i po przekształceniu:

$$2\mu \operatorname{div} \vec{U} + 3\lambda \operatorname{div} \vec{U} = 0$$

Biorąc pod uwagę, że dla płynu ściśliwego

$$\operatorname{div} \vec{U} \neq 0$$

można podzielić obie strony przez tę wielkość otrzymując:

$$2\mu + 3\lambda = 0$$

Ostatecznie otrzymujemy wartość współczynnika proporcjonalności:

$$\lambda = -\frac{3}{2}\mu$$

co po podstawieniu do (3.24) pozwala zapisać wyrażenie określające naprężenia normalne w płynie lepkim:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + 2\mu \varepsilon_x - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{U} \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \varepsilon_y - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{U} \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \varepsilon_z - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{U}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Podstawiając wz. (3.25) oraz (3.19) do zal. (3.18) otrzymujemy równanie ruchu dla płynu lepkiego, które w postaci rzutów na trzy osie zapisać można następująco:

$$\begin{aligned}\frac{DU_x}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 U_x + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{U}) \\ \frac{DU_y}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 U_y + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{U}) \\ \frac{DU_z}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 U_z + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{U})\end{aligned}\quad (3.26)$$

lub w postaci wektorowej:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{3} \nu \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U}) \quad (3.27)$$

Równania te znane są jako *równania Navier-Stokesa* i stanowią najbardziej ogólny przypadek opisu ruchu newtonowskiego płynu ściśliwego przy stałej wartości współczynnika lepkości.

Równanie (3.27) może zostać uproszczone, jeżeli rozpatrywać będziemy przepływ cieczy, dla której pominąć można wpływ ściśliwości, co pozwala zapisać:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (3.28)$$

W przypadku przepływów gazu odbywających się z umiarkowanymi prędkościami ($Ma < 0.3$) oprócz sił ściśliwości pominąć można także siły masowe, gdyż siła masowa równoważona jest ciśnieniem hydrostatycznym. Jeżeli zatem przez ciśnienie p rozumiemy ciśnienie hydrodynamiczne będące różnicą między ciśnieniem całkowitym i ciśnieniem hydrostatycznym, wówczas równanie Navier-Stokesa będzie można zapisać następująco:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (3.29)$$

Równanie Navier-Stokesa zawiera tę samą liczbę niewiadomych co równanie Eulera i uzupełnione być musi również o równanie ciągłości i równanie stanu. Podobnie jak w przypadku równania Eulera także i równanie Navier-Stokesa musi być uzupełnione warunkami początkowymi i brzegowymi, przy czym stopień złożoności warunków brzegowych jest w tym przypadku znacznie większy. Przykładem może być warunek brzegowy dla prędkości na sztywnej ścianie, który wymaga, aby zarówno składowa normalna prędkości jak i składowa styczna na ścianie były równe zero, tzn.:

$$U_n = U_s = 0 \quad (3.30)$$

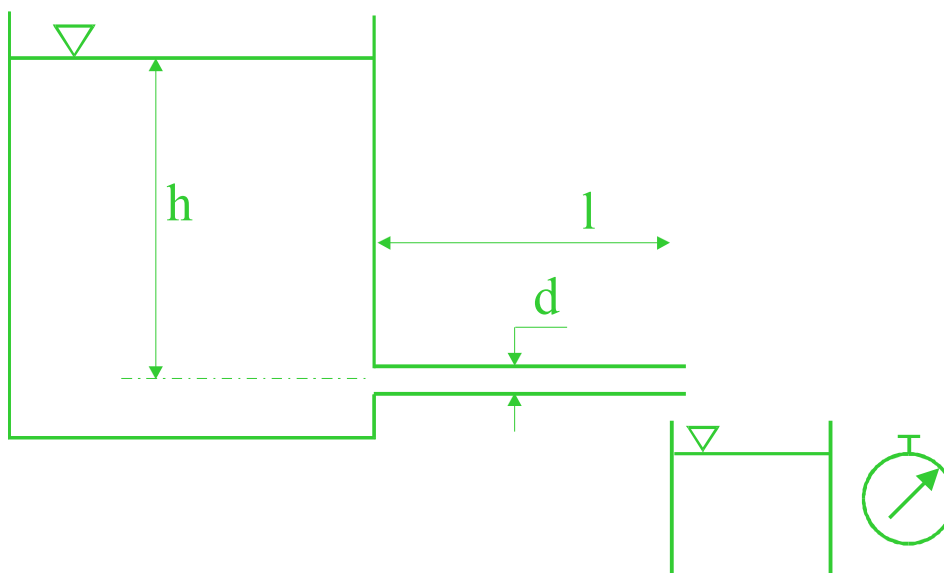
gdyż siły adhezji między materiałem ściany i płynem powodują, że prędkość na ścianie musi być równa zero. Problematyka warunków brzegowych i rozwiązywalności równań Navier-Stokesa jest zbyt złożona, aby mogła być rozpatrywana w niniejszym wykładzie. W dalszych rozdziałach rozpatrywane będą wyniki analizy uzyskane przy pomocy uproszczonych równań Navier-Stokesa, przy czym ze względu na wygodę dla oznaczenia tych równań używana będzie skrócona nazwa równań N-S.

3.4. Przykład rozwiązania równania N-S, prawo Hagen-Poiseuille'a.

Stopień złożoności matematycznej równania N-S, wynikający zarówno z jego nieliniowości jak i skomplikowanego charakteru warunków brzegowych sprawia, że znanych jest zaledwie kilka ścisłych rozwiązań uzyskanych dla przypadków, w których równania N-S upraszczają się do postaci liniowej.

Przykładem takiego ścisłego rozwiązania jest uzyskane z równania N-S analityczne potwierdzenie empirycznego prawa sformułowanego niezależnie przez Hagen (1839) i Poiseuille'a (1840):

Wydatek cieczy przepływającej przez rurkę o małej średnicy jest proporcjonalny do różnicy ciśnień powodującej przepływ, proporcjonalny do czwartej potęgi średnicy rurki i odwrotnie proporcjonalny do jej długości.



Rys.3.9. Schemat doświadczenia ilustrującego prawo Hagen-Poiseuille'a.

Na rys. 3.9 pokazano schemat doświadczenia ilustrującego prawo Hagen-Poiseuille'a, w którym rurka o średnicy d i długości l połączona jest ze zbiornikiem napełnionym do wysokości h . Wydatek cieczy Q zmierzony być może pokazaną schematycznie na rys. 3.9 metodą objętościową, tzn. przez pomiar czasu napełniania T zbiornika o znanej objętości V , co pozwala obliczyć:

$$Q = \frac{V}{T}$$

Ponieważ wypływ cieczy z rurki odbywa się do otoczenia, stąd też różnica ciśnień wymuszająca przepływ wynosi:

$$\Delta p = h \cdot \rho \cdot g$$

i wobec stałości gęstości cieczy ρ i przyspieszenia ziemskiego g różnica ciśnień jest proporcjonalna do wysokości napełnienia zbiornika h .

Prawo Hagen-Poiseuille'a zapisać można układem następujących związków proporcjonalności:

$$Q \sim \Delta p$$

$$Q \sim \frac{1}{l}$$

$$Q \sim d^4$$

Proporcjonalność wydatku do różnicy ciśnień i jego odwrotna proporcjonalność do długości rurki jest intuicyjnie łatwa do przewidzenia, gdyż różnica ciśnień na końcach rurki daje przecież wypadkową siłę ciśnieniową wymuszającą ruch płynu i większa wartość różnicy ciśnień to większa siła wymuszająca przyrost prędkości przepływu i przyrost wydatku. Długość rurki proporcjonalna jest z kolei do siły oporu wywołanej tarciami, której działanie przeciwstawia się sile wymuszającej ruch co sprowadzać się musi do zmniejszenia prędkości i wydatku jeżeli długość rurki będzie większa. Zaskakująca jest natomiast proporcjonalność wydatku do czwartej potęgi średnicy, gdyż intuicyjnie można by oczekiwać, że wydatek

cieczy będzie proporcjonalny do pola przekroju poprzecznego rurki, które jednak proporcjonalne jest do kwadratu średnicy.

Uzyskanie analitycznego rozwiązania dla tego przypadku wymagać będzie scałkowania następującego układu równań:

- równania N-S w postaci właściwej dla ustalonego przepływu cieczy, dla której pominąć można człon ściśliwości:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (3.31a)$$

- równania ciągłości w postaci właściwej dla ustalonego przepływu płynu nieściśliwego:

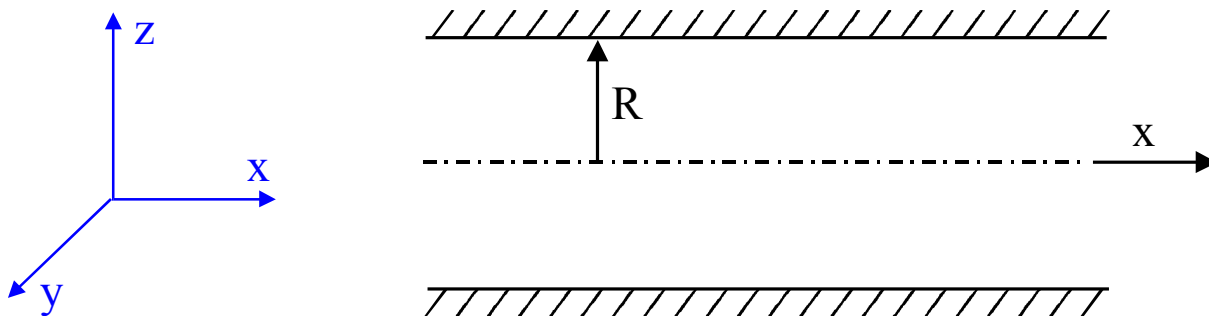
$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (3.31b)$$

- równania stanu, wyrażającego stałość gęstości cieczy:

$$\rho = \text{idem} \quad (3.31c)$$

Warunek brzegowy sprowadzi się do zerowej prędkości przepływu na ścianie rurki, zgodnie z uwagami zamieszczonymi w rozdziale poprzednim.

Przyjmijmy, że oś rurki pokrywa się z kierunkiem osi x kartezjańskiego układu współrzędnych, jak pokazano na rys. 3.10.



Rys.3.10. Geometria przepływu Hagen-Poiseuille'a.

Jednostkowa siła masowa:

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

ma w przyjętej geometrii następujące składowe:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g$$

natomiast wektor prędkości

$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

w rurce o małej średnicy ma niezerową składową jedynie w kierunku przepływu, tzn.:

$$U_x \neq 0; \quad U_y = 0; \quad U_z = 0;$$

co oznacza, że jest to przepływ jednowymiarowy. Przepływ jest ustalony co oznacza, że można pominąć pochodną lokalną, wobec tego pochodne substancjalne prędkości dla przepływu jednowymiarowego przyjmują postać:

$$\frac{DU_x}{Dt} = U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

$$\frac{DU_y}{Dt} = 0$$

$$\frac{DU_z}{Dt} = 0$$

co pozwala zapisać wyjściowy układ równań N-S w postaci:

$$\begin{aligned}
 U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \\
 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 0 &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

natomiast równanie ciągłości

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

dla przepływu jednowymiarowego przekształcić można następująco:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = 0 \tag{3.33}$$

Równanie stanu sprowadza się do stałości gęstości ρ w równ. (3.32) oraz (3.33). W trzecim równaniu układu (3.32) wobec małej średnicy rurki pominąć można zmienność ciśnienia hydrostatycznego, a wobec zerowej wartości gradientu ciśnienia wzdłuż kierunku y (patrz drugie równ. (3.32)) przyjąć można, że ciśnienie jest funkcją jedynie kierunku x , tzn.:

$$p = p(x)$$

Pozwala to zastąpić w pierwszym równaniu (3.32) pochodną cząstkową:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

różniczką zwyczajną:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Z równania ciągłości (3.33) wynika, że składowa prędkości U_x może być jedynie funkcją:

$$U_x(y, z)$$

a po uwzględnieniu tych wniosków oraz wz. (3.33) w równ. (3.32), ten ostatni związek zapisać można:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right)$$

co po prostym przekształceniu pozwala nam zapisać równanie ruchu w postaci:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) = \frac{dp}{dx} \tag{3.34}$$

Ciśnienie p może zmieniać się tylko w kierunku x , co zgodnie z tys. 3.11 pozwala zapisać:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}$$

gdzie Δp oznacza różnicę ciśnień działających na przekroje 1 oraz 2 walcowego elementu płynu. Równanie ruchu (3.34) można zatem przekształcić do postaci:

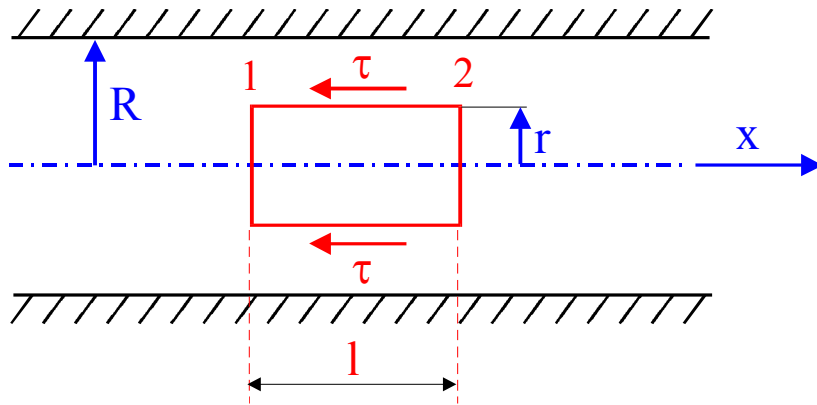
$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{l} \tag{3.35}$$

a po wprowadzeniu nowej zmiennej:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

warunek brzegowy zapisać można:

$$U_x = 0 \quad (\text{dla } r = R) \tag{3.36}$$



Rys.3.11. Walcowy element płynu przy przepływie przez cienką rurkę.

Całka równania (3.35) będzie wynosić:

$$U_x = C \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) = C \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.37)$$

Dwukrotne różniczkowanie wz. (3.37) względem y oraz z oraz podstawienie do (3.35) daje:

$$\frac{4C}{R^2} = \frac{\Delta p}{\mu l}$$

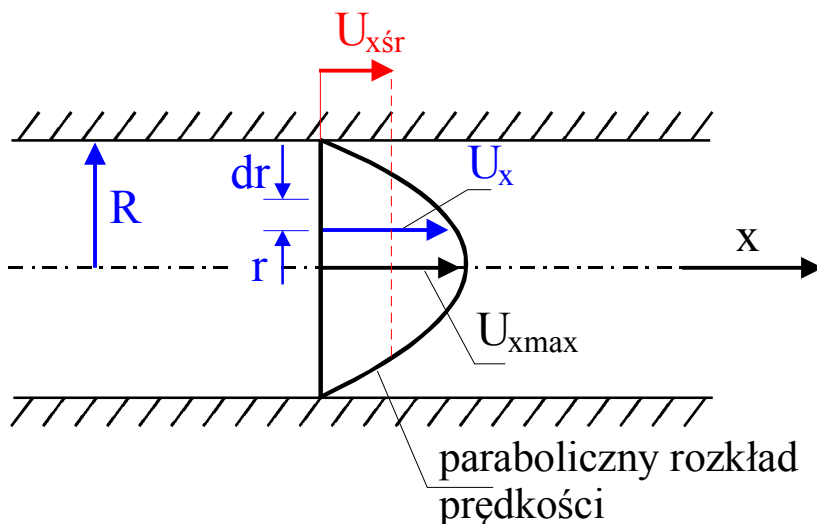
stąd można obliczyć wartość stałej całkowania występującej w (3.37) jako:

$$C = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}$$

co po podstawieniu do (3.37) daje następujące wyrażenie określające rozkład prędkości w poprzecznym przekroju rurki:

$$U_x = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad (3.38)$$

Otrzymana zależność określa paraboliczny rozkład prędkości, co pokazano na rys. 3.12.



Rys.3.12. Rozkład prędkości w poprzecznym przekroju rurki przy przepływie Hagen-Poiseuille'a.

Związek (3.38) spełnia warunek brzegowy gdyż dla $r = R$:

$$U_x = 0$$

natomiast maksymalna wartość prędkości występuje w osi rurki (dla $r = 0$) i wynosi:

$$U_{x \max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2 \quad (3.39)$$

Rozkład prędkości dany wz. (3.38) pozwala również obliczyć wydatek cieczy przepływającej przez rurkę i w tym celu zgodnie z rys. 3.12 obliczyć należy najpierw wydatek elementarny będący iloczynem pola elementarnego przekroju i prędkości:

$$dQ = 2\pi r dr U_x$$

a następnie po podstawieniu za U_x zależności (3.38) i scałkowaniu otrzymujemy:

$$Q = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

co po przekształceniach daje ostatecznie wydatek przepływającej cieczy równy:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8l\mu} R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \frac{\Delta p}{l} d^4 \quad (3.40)$$

Zależność ta jest analitycznym potwierdzeniem empirycznie sformułowanego prawa Hagen-Poiseuille'a, że wydatek przepływający przez rurkę jest proporcjonalny do różnicy ciśnień Δp o czwartej potęgi średnicy d^4 oraz odwrotnie proporcjonalny do długości rurki.

Związek (3.40) jest również dowodem poprawności równania Navier-Stokesa i jeżeli nawet nie ma on charakteru ogólnego, to wykazuje, że jest ono słuszne przynajmniej dla przepływu cieczy newtonowskiej przez przewody o małej średnicy.

Wydatek Q można również obliczyć bez potrzeby całkowania, gdyż z elementarnej geometrii wynika, że objętość paraboloidy obrotowej jest równa objętości walca o polu podstawy równym podstawie paraboloidy i wysokości równej połowie wysokości paraboloidy. Z rys. 3.12 wynika, że pole podstawy paraboloidy wynosi:

$$\pi R^2$$

natomiast połowa jej wysokości równa jest $\frac{1}{2} U_{x \max}$, co po uwzględnieniu wzoru (3.39)

pozwała zapisać:

$$Q = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

co jest wynikiem identycznym z zależnością (3.40).

Prawo Hagen-Poiseuille'a wyprowadzić można również bezpośrednio, bez konieczności całkowania równań N-S. Jeżeli bowiem rozpatrzemy bilans sił działających na walcowy element płynu z rys. 3.11, wówczas zauważymy, że ruch tego elementu określony jest przez wzajemną równowagę sił ciśnienia działających na powierzchnie czołową i tylną oraz sił lepkości działających na powierzchnie boczne walca. Jak pokazano na rys. 3.10 ruch płynu wymuszony jest różnicą ciśnień Δp , co należy rozumieć jako nadwyżkę ciśnienia ponad ciśnienie atmosferyczne przyłożoną na wlocie do rury. Na końcu rury nadwyżka ciśnienia równa jest zeru, gdyż na wylocie ciśnienie musi być równe ciśnieniu atmosferycznemu. Oznacza to, że w kolejnych przekrojach ciśnienie jest coraz mniejsze, co ująć można następująco:

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

Jeżeli na tylnej powierzchni walca ciśnienie wynosi p_1 , wówczas dla spowodowania ruchu elementu w kierunku x zachodzić musi związek:

$$p_1 > p_2$$

a różnicę tych ciśnień zapisać możemy jako:

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Jeżeli różnica ciśnień na powierzchniach czoła i tyłu walca wynosi Δp , wówczas wypadkowa siła ciśnienia wynosić będzie:

$$\pi r^2 \Delta p$$

Siły ciśnieniowe są równoważone siłami lepkości, które działają w kierunku przeciwnym do przepływu (patrz rys. 3.11) a ponieważ siły oporu lepkiego będą iloczynem pola powierzchni i naprężeń, stąd też zapisać można:

$$2\pi r \cdot l \cdot \tau = 2\pi r \cdot l \cdot \mu \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r}$$

Przepływ przez cienką rurkę jest przepływem jednowymiarowym i stąd też:

$$\frac{\partial U_x}{\partial r} = \frac{dU_x}{dr}$$

i bilans równowagi sił działających na cylindryczny element płynu zapisać można:

$$\pi r^2 \Delta p - 2\pi r \cdot l \cdot \mu \frac{dU_x}{dr} = 0$$

stąd

$$\frac{dU_x}{dr} = -\frac{\Delta p r}{2 l \mu} \quad (3.41)$$

przy czym zmiana znaku wynika z uwzględnienia znaku promieniowego gradientu prędkości:

$$\frac{dU_x}{dr} < 0$$

Po scałkowaniu równania (3.41) otrzymujemy:

$$U_x = -\frac{\Delta p r^2}{4 l \mu} + C$$

a stałą całkowania wyznaczamy z warunku brzegowego dla $r = R$:

$$U_x = 0$$

stąd

$$C = \Delta p \frac{R^2}{4 l \mu}$$

i ostatecznie otrzymujemy zależność opisującą promieniowy rozkład prędkości:

$$U_x = \frac{\Delta p}{4 \mu l} (R^2 - r^2)$$

identyczną ze wz. (3.38).

Analityczna postać prawa Hagen-Poiseuille'a ma również ważne zastosowanie praktyczne, które wynika z następującego przekształcenia wz. (3.40):

$$\mu = \frac{\pi \Delta p}{128 Q l} d^4 \quad (3.42)$$

skąd wynika, że znajomość Δp , Q , l oraz d pozwala wyznaczyć współczynnik lepkości μ wypływającej cieczy. Przyrządy oparte na tej zasadzie i służące do wyznaczania lepkości cieczy nazywane są *wiskozymetrami*.

Przepływ Hagen-Poiseuille'a nie jest jedynym analitycznym rozwiązaniem równania N-S. Najbardziej znanym przykładem jest tu przepływ Couette'a między dwiema równoległymi, nieskończonymi płytami położonymi w małej odległości od siebie, przy czym jedna z tych płyt jest nieruchoma a druga porusza się z jednostajną prędkością wymuszając w ten sposób przepływ charakteryzujący się liniowym rozkładem prędkości. Drugim znanym rozwiązaniem jest przepływ Poiseuille'a w szczelinie między dwiema równoległymi, nieskończonymi płytami charakteryzujący się parabolicznym rozkładem prędkości. Obydwa te rozwiązania znajdują praktyczne zastosowanie w teorii smarowania, przy czym w odróżnieniu od jednowymiarowego przepływu Hagen-Poiseuille'a zarówno przepływ Couette'a jak i przepływ Poiseuille'a są przepływami dwuwymiarowymi. Należy tu jednak zauważyć, że liczba znanych rozwiązań analitycznych równania N-S jest bardzo ograniczona a powodem jest złożoność matematyczna tego równania, wynikająca z nieliniowości członu

konwekcyjnego występującego w pochodnej substancjalnej. Wymienione tu przykłady rozwiązań dotyczą przepływów bardzo prostych, dla których człon konwekcyjny staje się równy zero. Istnieją również przepływy z niezerową wartością tego członu, dla których udało się znaleźć rozwiązanie analityczne, jednak zagadnienie to wykracza poza przyjęte ramy wykładu a zainteresowani Czytelnicy mogą znaleźć informacje dotyczące tych zagadnień m.in. w książkach I.G.Currie czy T.Fabera.

3.5. Ruch laminarny i turbulentny. Doświadczenie Reynoldsa.

Złożoność matematyczna równania N-S jest ważną ale nie jedyną przyczyną trudności w uzyskaniu rozwiązań analitycznych. Bardzo ważną rolę odgrywa tu także złożony charakter samego przepływu płynu lepkiego, czego przykładem może być zaskakująca postać prawa Hagen-Poiseuille'a sugerująca niezgodną z intuicją proporcjonalność wydatku do czwartej potęgi średnicy rurki. Kolejnym przykładem paradoksalnego (t.j. niezgodnego z intuicją) zachowania płynu jest opór towarzyszący przepływowi cieczy lepkiej przez rurkę o małej średnicy, określony przez różnicę ciśnień Δp niezbędną do przetłoczenia zadanego wydatku Q . Dla zilustrowania tego problemu przekształćmy wz. (3.40) do postaci:

$$\Delta p = \frac{128 \mu l}{\pi d^4} Q \quad (3.43)$$

Założmy, że rozpatrywać będziemy dwa przepływy tej samej cieczy ($\mu = \text{idem}$) przez rurki o tej samej długości l , które charakteryzować się będą tym samym wydatkiem Q . Pierwszy przepływ odbywa się przez rurkę o średnicy d_1 przy stracie ciśnienia Δp_1 natomiast drugi odbywa się przez rurkę o dwukrotnie większej średnicy $d_2 = 2d_1$ i towarzyszy mu spadek ciśnienia Δp_2 . Podstawienie tych wielkości do wz. (3.43) daje stosunek spadków ciśnień (oporów przepływu) wynoszący:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 = 16$$

Oznacza to, że przy zachowaniu identycznego wydatku przepływającej cieczy dwukrotny wzrost średnicy dający czterokrotny wzrost pola przekroju prowadzi do 16-krotnego zmniejszenia oporów przepływu, co jest z pewnością wynikiem trudnym do intuicyjnego wyjaśnienia.

Znacznie ważniejszy paradoks dotyczy jednak wzajemnego związku między oporem przepływu a średnią prędkością definiowaną jako iloraz wydatku i pola przekroju poprzecznego rury:

$$U_{xsr} = \frac{Q}{\pi d^2} \cdot 4$$

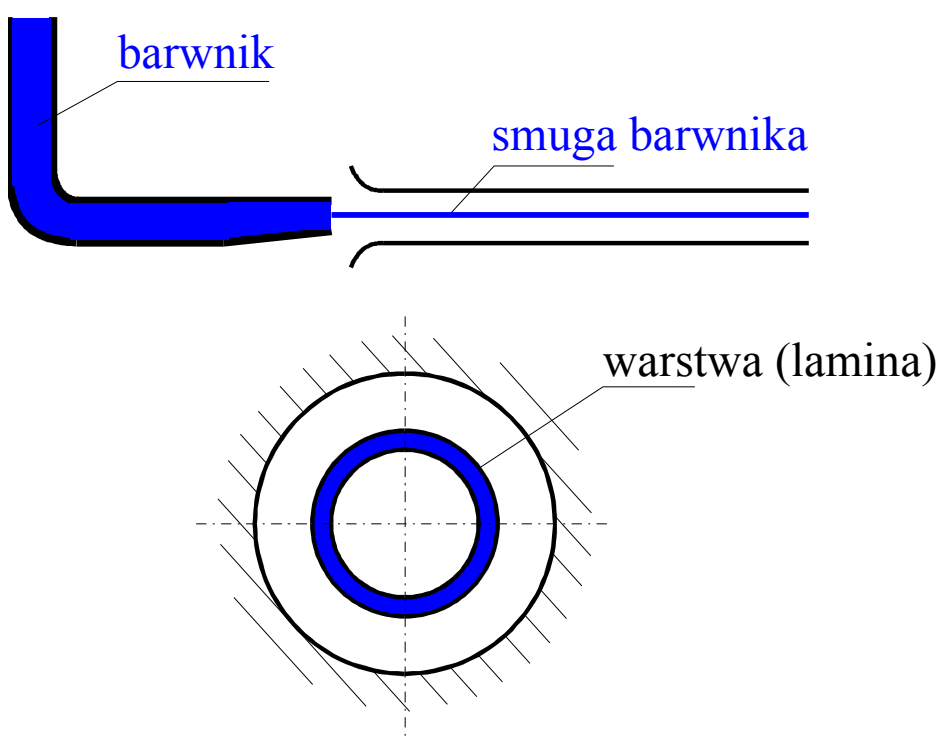
co po podstawieniu do wz. (3.43) daje zależność:

$$\Delta p = \frac{32 \mu l}{d^2} U_{xss} \quad (3.44)$$

świadcząca o *proporcjonalności oporów przepływu do średniej prędkości przepływu*. Dla projektanta rurociągu wz. (3.44) sugeruje, że jeżeli przy U_{xss1} rurociąg charakteryzuje się oporem Δp_1 , to podwojenie wydatku cieczy przepływającej przez ten sam rurociąg oznaczające dwukrotne zwiększenie średniej prędkości ($U_{xss2} = 2U_{xss1}$) winno dać dwukrotny wzrost oporu Δp_2 , co łatwo sprawdzić po podstawieniu do (3.44):

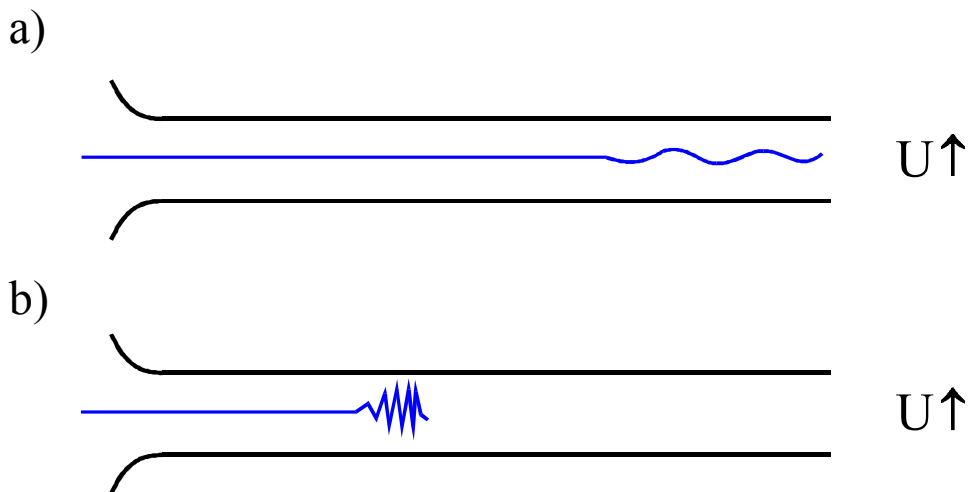
$$\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \frac{U_{xsr2}}{U_{xsr1}} = 2$$

Doświadczenie wykazało prawdziwość tego wniosku ale jedynie dla bardzo małych prędkości przepływu. Dla *większych prędkości przepływu straty wykazywały proporcjonalność do kwadratu prędkości średniej* co oznaczało, że dwukrotne zwiększenie wydatku powodowało czterokrotnie większe straty. Identyczny skutek dawało również zwiększenie średnicy rury oraz zmniejszenie lepkości płynu, przy czym dodatkowo komplikację wprowadzał brak powtarzalności tego zjawiska. W tych samych bowiem warunkach przepływ mógł spełniać założenia prawa Hagen-Poiseuille'a lub też wykazywać proporcjonalność strat przepływu do kwadratu prędkości średniej co oznaczało, że prawo to przestawało obowiązywać. Podstawową trudnością w znalezieniu rozwiązania była niemożność wykonania pomiarów prędkości i ciśnienia, gdyż wprowadzenie jakiegokolwiek przyrządu pomiarowego zaburzało przepływ i zmieniało obraz zjawiska. Niemożliwe było również śledzenie trajektorii ruchu przezroczystego płynu. Problem został rozwiązany w r. 1883 przez Osborna Reynoldsa, który dokonał tzw. wizualizacji przepływu wody, wprowadzając do niej smugę barwnika o identycznej gęstości i prędkości. Przepływ odbywał się w szklanej rurce, co umożliwiało obserwację zachowania smugi barwnika co pokazano na rys. 3.13.



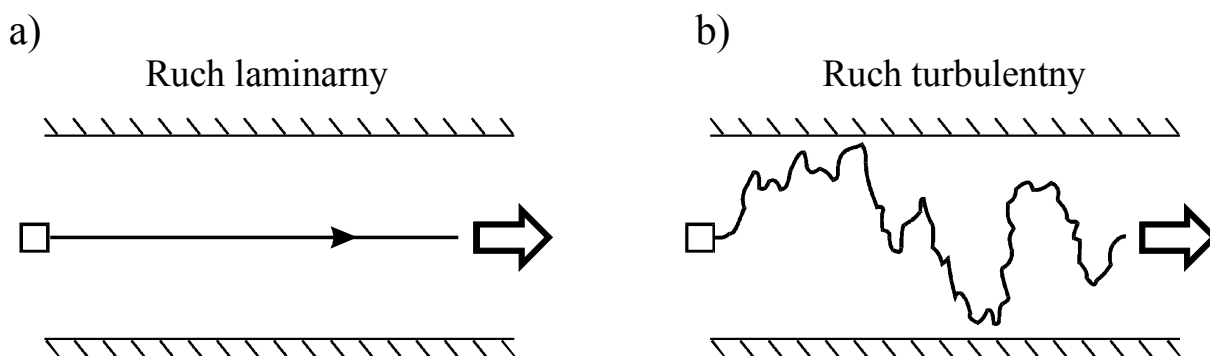
Rys.3.13. Schemat wizualizacji ruchu płynu w doświadczeniu Reynoldsa oraz obraz smugi barwnika w ruchu laminarnym.

Reynolds wykazał, że przepływ płynu odbywać się może w dwóch stanach, którym odpowiada zupełnie odmienne zachowanie strugi barwnika. W stanie I smuga barwnika zachowywała spójność wzdłuż dowolnie dużej długości, co oznaczało, że poszczególne warstwy płynu poruszają się we wzajemnej izolacji lub raczej „ślizgają” się po sobie i objętości płynu z sąsiednich warstw nie podlegają mieszanii. Uważne obserwacje wykazały jedynie, że w dalszych odległościach kontury smugi barwnika ulegały niewielkiemu rozmyciu, identycznemu jak w zjawisku molekularnej dyfuzji realizowanej przez ruchy Browna. Reynolds wykazał, że w tym stanie ruchu płynu straty są proporcjonalne do pierwszej potęgi prędkości średniej co oznaczało, że jest to przepływ opisany prawem Hagen-Poiseuille'a a więc charakteryzujący się parabolicznym profilem prędkości. Biorąc pod uwagę, że „uwarstwienie” przepływu było dominującą cechą tego stanu ruchu, Reynolds zaproponował powszechnie dziś przyjęty termin *ruch laminarny* (od łacińskiego określenia *lamina* – warstwa).



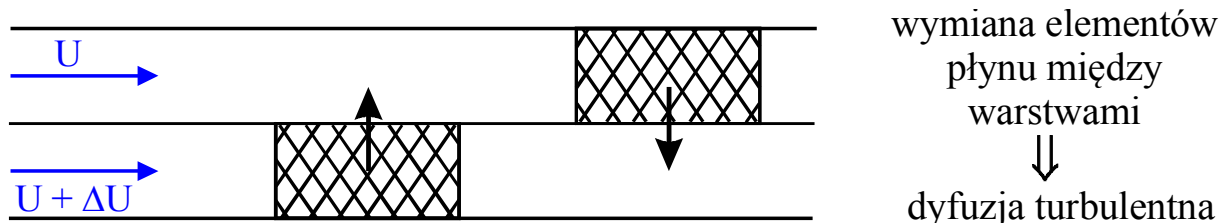
Rys.3.14. Obraz smugi barwnika w ruchu turbulentnym.

Zwiększenie prędkości przepływu powodowało wyraźną zmianę zachowania smugi barwnika, która najpierw wykonywała sinusoidalne oscylacje (rys. 3.14a) a przy dalszym zwiększaniu prędkości przepływu barwnik ulegał gwałtownemu rozmyciu (rys. 3.14b). W tym stanie ruchu straty ciśnienia były proporcjonalne do kwadratu prędkości średniej co oznaczało, że nie był to przepływ Hagen-Poiseuille'a. Uważne obserwacje trajektorii elementów płynu wykazały, że w odróżnieniu od ruchu laminarnego, w którym trajektorie były regularnymi, powtarzalnymi liniami (rys. 3.15a), trajektorie w II stanie ruchu stawały się chaotyczne (rys. 3.15b) co oznaczało, że oprócz składowej średniej prędkości pojawiała się tu losowo zmienna dodatkowa składowa prędkości.



Rys.3.15. Trajektorja elementów płynu w ruchu laminarnym a) i turbulentnym b).

Ta właśnie losowa zmienność chwilowej prędkości i losowe „błądzenie” elementu płynu były powodem wprowadzenia terminu *ruch turbulentny* dla oznaczenia tego stanu przepływu. Dalsze prace doświadczalne pozwoliły wyjaśnić mechanizm zjawiska odpowiedzialnego za rozmywanie strugi barwnika. Jeżeli w przepływie turbulentnym wyobrazimy sobie dwie sąsiadujące ze sobą warstwy płynu (rys. 3.16), wówczas obecność losowych zakłóceń pola prędkości oznaczać będzie, że między myślowo wyodrębnionymi warstwami płynu przemieszczane są całe elementy płynu a nie tylko pojedyncze molekuly, jak miało to miejsce w ruchu laminarnym. Sąsiadujące ze sobą warstwy płynu mogą mieć różną prędkość (rys. 3.16) co powoduje, że w przepływie turbulentnym zachodzić może intensywna wymiana nie tylko masy lecz także i pędu, przy czym ze względu na podobieństwo tego zjawiska do dyfuzji molekularnej nazwane ono zostało *dyfuzją turbulentną*.



Rys.3.16. Ilustracja turbulentnej dyfuzji pędu.

Należy tu zauważyć, że turbulentna dyfuzja powoduje intensywny transport masy i pędu w kierunku poprzecznym do zasadniczego kierunku przepływu – w rozważanym przepływie w rurze jest to transport w kierunku promieniowym. Bardziej szczegółowa dyskusja różnic między dyfuzją turbulentną i molekularną zostanie przeprowadzona w jednym z dalszych wykładów mechaniki płynów, a obecnie wystarczy musi informacja, że *intensywność dyfuzji turbulentnej jest większa o trzy do czterech rzędów wielkości od dyfuzji molekularnej*. Z pewną dozą uproszczenia można przyjąć, że tak intensywny transport całych elementów płynu wymaga wydatkowania energii, która może być czerpana jedynie z energii zawartej w przepływie, co tłumaczyć może właściwą dla przepływu turbulentnego proporcjonalność strat ciśnienia (energii potencjalnej przepływu) do kwadratu prędkości.

Wartość doświadczenia Reynoldsa zawarta jest nie tylko w rozpoznaniu istnienia dwóch stanów przepływu tj. ruchu laminarnego i turbulentnego. Przeprowadzając bowiem szereg doświadczeń z różnymi płynami i średnicami rur Reynolds wykazał, że o istnieniu ruchu laminarnego lub turbulentnego decyduje nie sama prędkość przepływu, średnica rury czy też lepkość płynu, lecz ich bezwymiarowa kombinacja, nazwana później *liczbą Reynoldsa*:

$$Re = \frac{U_{sr} \cdot d}{\nu} \quad (3.45)$$

w której:

- Re - bezwymiarowa liczba
- U_{sr} - średnia prędkość przepływu
- d - średnica rury
- ν - lepkość kinematyczna płynu.

Doświadczenie wykazało, że jeżeli dla przepływu w rurze liczba Reynoldsa zawarta jest w zakresie:

$$Re < 2300$$

wówczas mamy zawsze przepływ laminarny a jakiegokolwiek zaburzenia wprowadzone do przepływu zanikają samoczynnie gdyż są przez przepływ tłumione. Jeżeli odpowiednia kombinacja średnicy, prędkości i lepkości daje liczbę Reynoldsa spełniającą warunek:

$$Re > 2300$$

wówczas laminarny początkowo przepływ może przejść w turbulentny, jeżeli tylko wystąpi jakiegokolwiek zaburzenie (drgania układu, zawirowanie wody na wlocie). Im większa jest wartość Re tym mniejsza amplituda zaburzenia wystarcza do przejścia laminarnego w turbulentny. Zachowanie specjalnych środków ostrożności, sprowadzających się do łagodnego ukształtowania wlotu i eliminacji drgań (doświadczenie przeprowadzone w wyrobisku kopalni soli), pozwoliło utrzymać ruch laminarny do wartości:

$$Re \approx 5 \cdot 10^5$$

Doświadczenia te nie pozwoliły na ustalenie dokładnej wartości liczby Re przy której przepływ zmieniałby się z laminarnego w turbulentny, gdyż zjawisko to wykazuje bardzo dużą wrażliwość na niekontrolowane (i często nieznanne) czynniki zewnętrzne i dlatego też problem ten do dziś nie doczekał się rozwiązania. Zamiast tego zdefiniowano dwie krytyczne wartości liczby Re, z których *pierwsza wartość krytyczna*

$$Re_{kr1} \cong 2300 \quad (3.46)$$

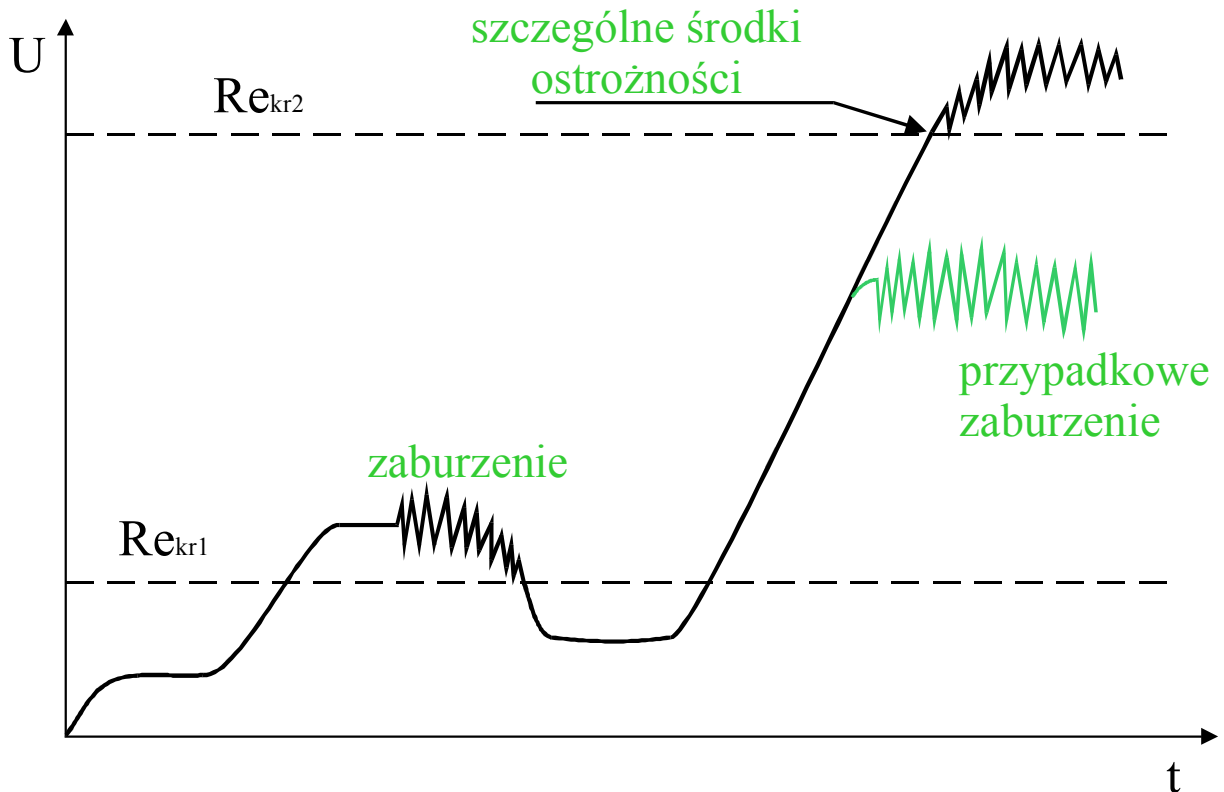
oznacza granicę stabilności przepływu w rurze, rozumianą jako najwyższa wartość Re przy której zaburzenia są tłumione a przepływ pozostaje zawsze w stanie ruchu laminarnego.

Druga wartość krytyczna wynosi

$$Re_{kr2} \cong 50000 \quad (3.47)$$

i oznacza górną granicę występowania przepływu laminarnego, powyżej której przepływ będzie zawsze turbulentny.

Zakres między Re_{kr1} i Re_{kr2} jest bardzo szeroki i mieszczą się w nim wszystkie przypadki, w których losowo występujące zaburzenie może przeprowadzić przepływ laminarny w turbulentny.



Rys.3.17. Zależność między wartością liczby Reynoldsa i stanem przepływu.

Ilustracją zachowania przepływu w rurze przedstawiono na rys. 3.17, na którym oś odciętych przedstawia czas a oś rzędnych prędkość przepływu mierzona w dowolnym miejscu w przepływie. Naniesiono tu również liniami przerywanymi pierwszą i drugą liczbę krytyczną Reynoldsa, obliczoną dla danej średnicy rury i lepkości płynu. Załóżmy, że w chwili $t=0$ przepływ zaczyna się od zerowej wartości prędkości U i przyspieszany jest do osiągnięcia zadanej wartości. Jeżeli tylko prędkość przepływu a zatem i liczba Re utrzymywana będzie w zakresie:

$$Re < Re_{kr1} \quad (3.48)$$

to przepływ będzie laminarny. Jeżeli prędkość zostanie zwiększona tak aby:

$$Re > Re_{kr1} \quad (3.48)$$

wówczas każde zaburzenie spowoduje, że przepływ laminarny przejdzie w turbulentny i pozostanie w tym stanie przez czas dowolnie długi. Oscylacje pokazane na rysunku wynikają z losowych fluktuacji prędkości charakterystycznych dla przepływu turbulentnego. Kolejny cykl zmian prędkości pokazuje, że powtórne uzyskanie przepływu laminarnego możliwe jest tylko wówczas, jeżeli prędkość zostanie zmniejszona na tyle, aby spełniony był warunek (3.48). Jeżeli powtórnie zaczniemy zwiększać prędkość, wówczas po przekroczeniu Re_{kr1}

przepływ stanie się turbulentny albo po wystąpieniu przypadkowego zaburzenia, lub też przy zachowaniu wszelkich środków ostrożności przy prędkości odpowiadającej:

$$Re = Re_{kr2}$$

Wartości krytycznych liczb Reynoldsa określone warunkami (3.46) i (3.47) zostały ustalone doświadczalnie i obarczone są one błędem pomiaru. Dlatego też w wielu źródłach spotkać można inne możliwe wartości, które zawierają się w zakresie:

$$Re_{kr1} = 2000 \div 3000$$

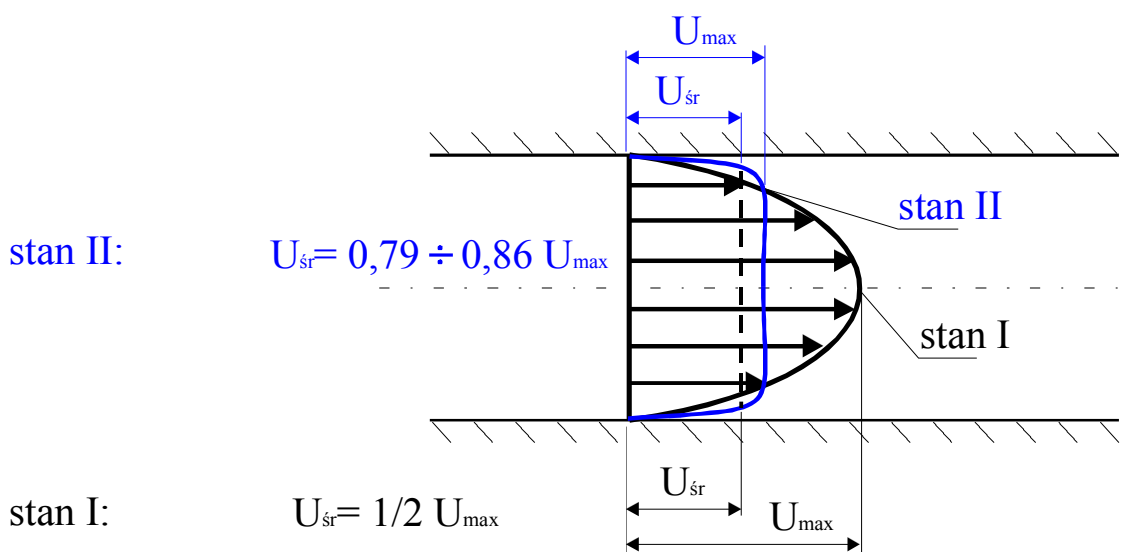
$$Re_{kr2} = 40000 \div 50000$$

Należy również pamiętać, że wartości te właściwe są dla przepływu w rurze, podczas gdy dla innych typów przepływu wartości te są oczywiście inne.

Przepływ laminarny w zastosowaniach technicznych występuje jedynie wówczas, gdy mamy do czynienia z przepływami o małych prędkościach np. w kapilarach, naczyniach włoskowatych, klinach smarowych wolnobieżnych łożysk ślizgowych czy w konwekcji naturalnej spowodowanej wyporem cieplnym. W zdecydowanej większości zastosowań technicznych występuje przepływ turbulentny, co pozwala stwierdzić, że *ruch laminarny jest w przyrodzie wyjątkiem, turbulentny zaś regułą*. W ostatnich jednak latach, dzięki rozwojowi metod rozwiązywania równań N-S udało się opracować metody takiego kształtowania opływanych powierzchni, aby nawet przy bardzo dużych wartościach liczb Reynoldsa możliwe było utrzymanie przepływu laminarnego, charakteryzującego się znacznie niższymi wartościami oporu. Przykładem może tu być kształt tzw. skrzydła laminarnego, który jeszcze w latach sześćdziesiątych mógł być stosowany jedynie w szybowcach, natomiast dziś, używany jest w samolotach konsorcjum Airbus, które dzięki temu zużywają znacznie mniej paliwa niż starsze konstrukcje.

3.6. Rozkład prędkości w poprzecznym przekroju rury w przepływie turbulentnym

Analizując prawo Hagen-Poiseuille'a wyprowadziliśmy wzór (3.38) wykazujący, że w ruchu laminarnym występuje paraboliczny rozkład prędkości w poprzecznym przekroju rury (patrz rys. 3.12). Jeżeli przepływ laminarny przejdzie w turbulentny i utrzymamy ten sam wydatek cieczy Q , wówczas rozkład prędkości staje się zupełnie inny, co wykazały wyniki licznych pomiarów wykonanych po opublikowaniu wyników doświadczenia Reynoldsa.



Rys.3.18. Porównanie rozkładów prędkości w poprzecznym przekroju rury dla przepływu laminarnego (stan I) i turbulentnego (stan II).

Na rys. 3.18 pokazano profile prędkości dla przepływu laminarnego (oznaczonego na rysunku jako stan I) i turbulentnego (stan II), które charakteryzują się tą samą wartością prędkości średniej U_{sr} . Zamieszczone tu wykresy wykazują, że w przepływie turbulentnym w bezpośredniej bliskości ściany promieniowy gradient prędkości jest znacznie większy niż w przepływie laminarnym:

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)_{\text{turb}} > \left(\frac{dU}{dr}\right)_{\text{lam}}$$

Ponieważ zgodnie z prawem Newtona naprężenia styczne są proporcjonalne do gradientu prędkości w kierunku normalnym do powierzchni

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial r}$$

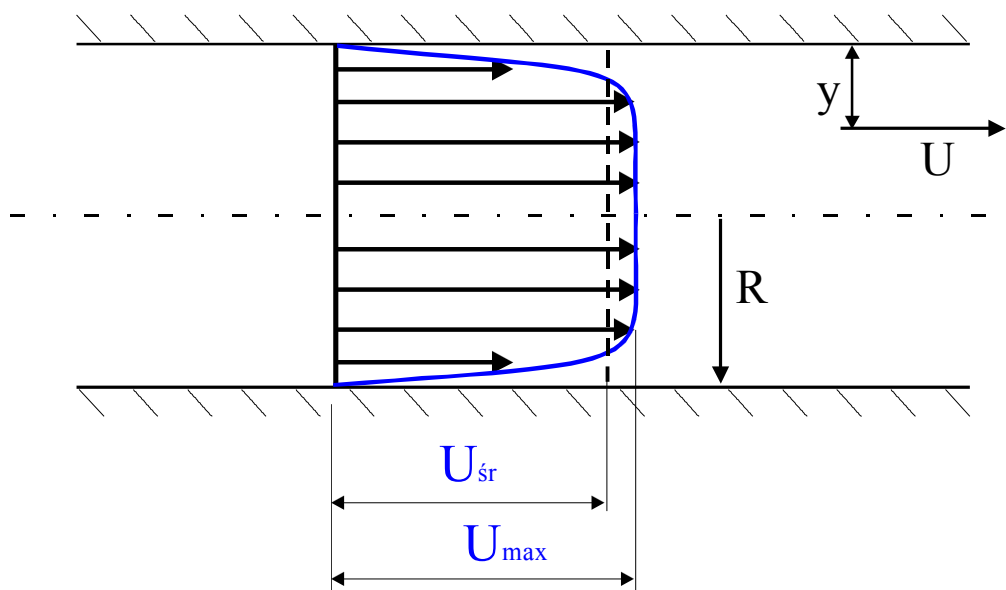
można stąd wnioskować, że naprężenia styczne na ścianie (dla $r = R$) w przepływie turbulentnym są znacznie większe niż w przepływie laminarnym

$$(\tau_{\text{turb}})_{r=R} > (\tau_{\text{lam}})_{r=R}$$

Wniosek ten uzasadnia większą wartość oporu przepływu w ruchu turbulentnym (proporcjonalną do kwadratu prędkości średniej) w porównaniu z oporami przepływu (tożsamymi ze stratą ciśnienia Δp) w przepływie laminarnym. Opór przepływu jest bowiem rezultatem sił lepkości (naprężeń stycznych), które działają w kierunku przeciwnym do przepływu. Drugą charakterystyczną cechą profilu prędkości w ruchu turbulentnym jest jego spłaszczenie w obszarze wewnętrznym przepływu powodujące, że wartość prędkości średniej wynosi:

$$U_{sr} = (0.79 \div 0.86) U_{\max}$$

gdzie U_{\max} oznacza wartość maksymalną prędkości występującą w osi rury (dla $r = 0$). Powodem jest intensywny transport promieniowy pędu będący rezultatem turbulენტnej dyfuzji, o której mówiliśmy dyskutując rysunek 3.16. Można sobie wyobrazić, że po przejściu z ruchu laminarnego do turbulentnego przemieszczanie elementów płynu z obszaru bliskiego osi przepływu w kierunku ściany spowoduje, że pęd płynu poruszającego się z większą prędkością zostanie przemieszczony w kierunku ściany, czego wynikiem będzie wyrównanie profilu prędkości.



Rys.3.19. Profil prędkości w ruchu turbulentnym oraz współrzędne Prandtla.

Profil prędkości zarejestrowany w ruchu turbulentnym został pokazany raz jeszcze na rysunku 3.19, na którym zaznaczono również współrzędną y , przyjętą przez Prandtla do opisu tego profilu. Wobec braku możliwości uzyskania rozwiązania równania N-S dla przepływu turbulentnego Prandtl zaproponował następujący, empiryczny wzór opisujący promieniowy rozkład prędkości:

$$U = U_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.50)$$

w którym U_{\max} jest maksymalną wartością prędkości występującą w osi rury, współrzędna y mierzona jest w kierunku od ściany do osi rury, tzn.:

$$y \in [0, R]$$

natomiast n jest wykładnikiem potęgowym określanym doświadczalnie w taki sposób, aby uzyskać możliwie najlepszą zgodność z rezultatami eksperymentu.

Zależność ta znana jako *wzór potęgowy Prandtla* wykazuje bardzo dobrą zgodność z doświadczeniem i wykorzystywana jest w uproszczonych metodach obliczeń oporów hydraulicznych.

Wyniki pomiarów wykazały, że dla rur szorstkich dobrą zgodność z eksperymentem uzyskuje się dla wartości

$$n = 6,$$

dla której profil prędkości spełnia następującą zależność:

$$\frac{U_{sr}}{U_{\max}} = 0.791$$

Dla rur gładkich w zakresie liczb Reynoldsa:

$$4 \cdot 10^4 < Re < 8 \cdot 10^4$$

optymalną wartością wykładnika jest

$$n = 7$$

dla której profil prędkości spełnia zależność:

$$\frac{U_{sr}}{U_{\max}} = 0.817$$

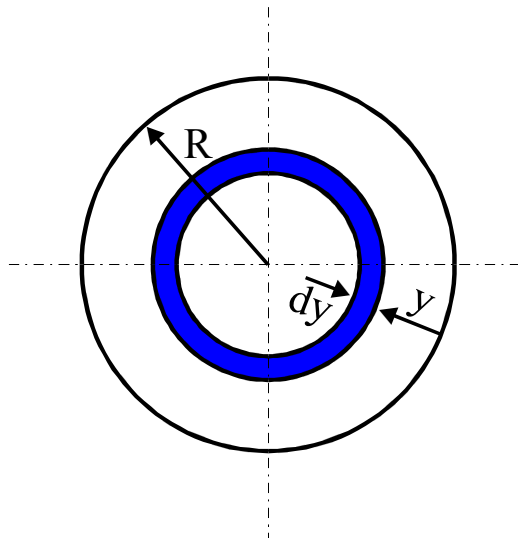
co świadczy, że w turbulentnym przepływie w rurze gładkiej profil prędkości jest bardziej płaski niż w rurze szorstkiej.

Dla większych wartości liczby Reynoldsa przy przepływie w rurach gładkich należy przyjmować większe wartości wykładnika n aby uzyskać zgodność z doświadczeniem. Dla uogólnienia tego wniosku obliczmy wydatek Q cieczy przepływającej przez rurę, obliczając najpierw wydatek elementarny przepływający przez zaznaczone na rys. 3.20 elementarne pole o powierzchni:

$$2\pi(R - y)dy$$

co daje elementarny wydatek:

$$dQ = U \cdot 2\pi(R - y)dy$$



Rys.3.20. Oznaczenia przyjęte przy całkowaniu wzoru Prandtla.

Scałkowanie powyższej zależności w granicach od 0 do R po podstawieniu wzoru (3.50) daje:

$$Q = \frac{2\pi R^2 U_{\max}}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \quad (3.51)$$

Uzależnienie wydatku od prędkości średniej pozwala zapisać:

$$Q = \pi R^2 U_{sr} \quad (3.52)$$

a porównanie wydatku obliczonego z (3.51) i (3.52) daje ostatecznie następującą zależność:

$$\frac{U_{sr}}{U_{\max}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \quad (3.53)$$

w której stosunek prędkości średniej do maksymalnej (będący miarą spłaszczenia profilu prędkości) jest wyłączną funkcją wykładnika potęgowego Prandtla.

Najlepszą zgodność z doświadczeniem dla przepływów w rurach gładkich uzyskano przyjmując:

- dla $Re = 2 \cdot 10^5$

$$n = 8; \quad \frac{U_{sr}}{U_{\max}} = 0.837$$

- dla $Re = 6.4 \cdot 10^5$

$$n = 9; \quad \frac{U_{sr}}{U_{\max}} = 0.853$$

- dla $Re = 2 \cdot 10^6$

$$n = 10; \quad \frac{U_{sr}}{U_{\max}} = 0.866$$

Analiza tych danych wykazuje, że dla rur gładkich wzrost liczby Reynoldsa prowadzi początkowo do wypłaszczenia profilu prędkości, który jednak przy bardzo dużych Re znów staje się bardziej wypukły.

Wzór Prandtla opisuje z dużą dokładnością profil prędkości w całym prawie przekroju poprzecznym zawodząc jedynie w bezpośredniej bliskości ściany, gdzie nawet dla bardzo dużych wartości Re przepływ staje się laminarny (tzw. podwarstwa lepka). Zagadnienie to jest omówione w rozdziale dotyczącym warstwy przyściennej w drugiej części wykładu.

4. Statyka płynów.

Jedno z ważnych zastosowań mechaniki płynów dotyczy sytuacji, gdy płyn jest nieruchomy i stąd nazwa *statyka płynów*. Większość z rozważanych tu przypadków dotyczy cieczy i stąd w wielu podręcznikach używa się nazwy *hydrostatyka*, mimo iż używane w tym dziale zależności dotyczą także i gazów.

4.1. Równanie równowagi dla nieruchomego płynu. Równanie Eulera.

Wyprowadzone w poprzednim rozdziale równanie N-S:

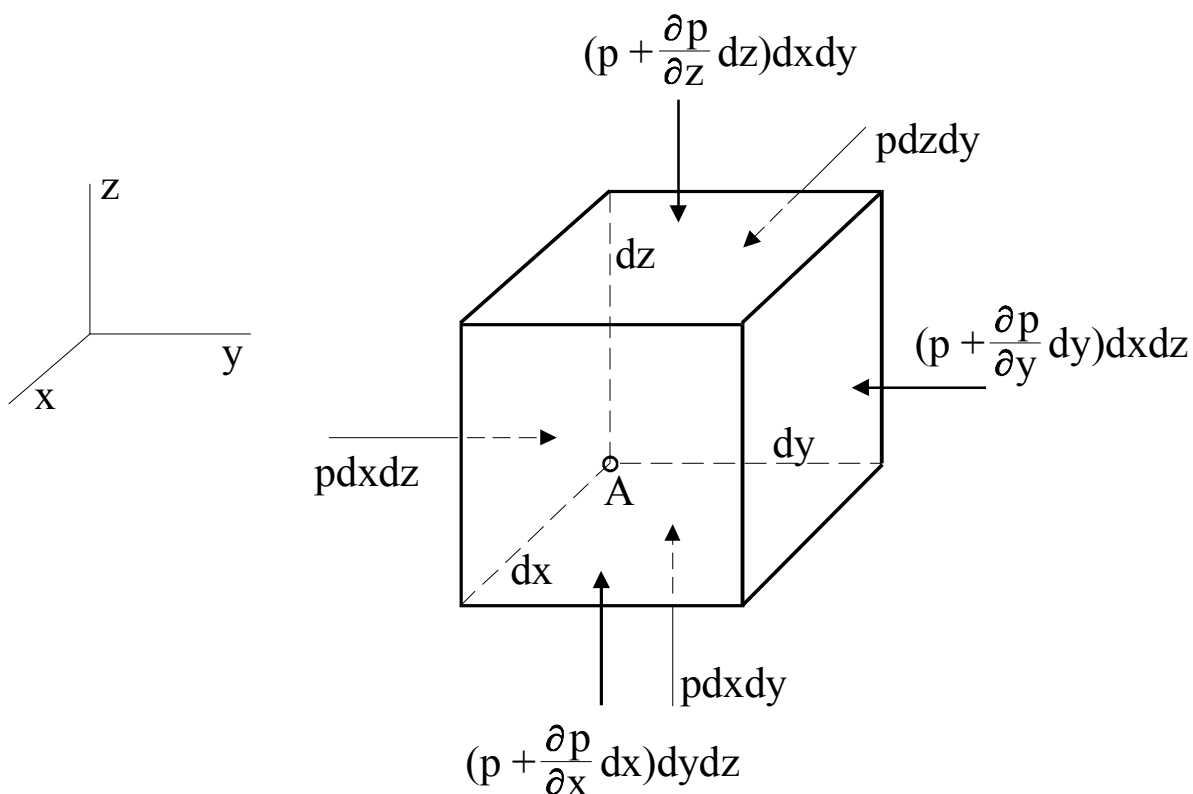
$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{3} \nu \text{grad} (\text{div} \vec{U}) \quad (3.27)$$

może być dla płynu nieruchomego uproszczone poprzez pominięcie wszystkich członów zawierających prędkość. Pozwala to zapisać równanie opisujące równowagę nieruchomego płynu następującym równaniem wektorowym znanym jako *równanie Eulera*:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (4.1)$$

lub układem równań skalarnych:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ Y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ Z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.2)$$



Rys.4.1. Siły powierzchniowe działające na nieruchomy element płynu.

Równanie (4.1) wskazuje, że gradient ciśnienia jest proporcjonalny do siły masowej skąd wnioskować można, że ciśnienie rośnie w kierunku działania sił masowych a współczynnikiem proporcjonalności tego przyrostu jest gęstość płynu ρ . Równania skalarne (4.2) sugerują natomiast, że przyrost ciśnienia wzdłuż dowolnie wybranego kierunku jest proporcjonalny do rzutu jednostkowej siły masowej na dany kierunek a współczynnikiem proporcjonalności jest gęstość płynu.

Równanie Eulera wyprowadzić można również bezpośrednio jako warunek równowagi sił działających na nieruchomy element płynu pokazany na rys. 4.1. Zakładamy, że rozpatrujemy płyn o jednorodnej gęstości ρ a krawędzie prostopadłościennego elementu płynu równoległe do osi przyjętego, kartezjańskiego układu współrzędnych wyodrębniają z nieruchomego płynu elementarną masę:

$$dm = \rho dx dy dz$$

Wektor jednostkowej siły masowej ma w przyjętym układzie współrzędnych następujące składowe:

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

natomiast składowe siły masowej działające w kierunku poszczególnych osi wynoszą:

$$X \rho dx dy dz; \quad Y \rho dx dy dz; \quad Z \rho dx dy dz$$

Siły masowe działające na element płynu zrównoważone są przez siły powierzchniowe, przy czym ciśnienie jako wielkość skalarna jest jednakowe w otoczeniu punktu A. Pozwala to zapisać siły powierzchniowe działające na ściany elementu położone od strony początku układu współrzędnych, w następującej postaci:

- w kierunku osi X :

$$p dy dz$$

- w kierunku osi Y :

$$p dx dz$$

- w kierunku osi Z :

$$p dx dy$$

Działanie sił masowych sprawia, że ciśnienie zmienia się i jest funkcją współrzędnych:

$$p(x, y, z) \tag{4.3}$$

wykazując następującą zmienność w kierunku osi współrzędnych:

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$$

Pozwala to zapisać siły powierzchniowe działające na ściany elementu przeciwległe do początku układu współrzędnych (patrz rys. 4.1) następująco:

- w kierunku osi X :

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy dz$$

- w kierunku osi Y :

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx dz$$

- w kierunku osi Z :

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx dy$$

Warunki równowagi sił działających na element płynu w kierunkach poszczególnych osi przyjmą zatem postać:

$$X \rho dx dy dz + p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy dz = 0$$

$$Y \rho dx dy dz + p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dz = 0$$

$$Z \rho dx dy dz + p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dy = 0$$

co po elementarnych przekształceniach daje równanie Eulera zapisane w postaci(4.2).

4.2. Warunki bezwirowości dla sił masowych

W równaniach Eulera oprócz gęstości, którą przyjmowaliśmy jako jednorodną w całej analizowanej objętości płynu, występuje też ciśnienie, które zgodnie ze wzorem (4.3) jest funkcją współrzędnych. Rozwiązanie układu równań (4.2) wymaga zatem dołożenia dodatkowego warunku, który będzie musiała spełniać siła masowa, aby płyn pozostawał w równowadze. W tym celu konieczna będzie eliminacja ciśnienia z tych równań poprzez ich przekształcenie do postaci:

$$\rho X = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho Y = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho Z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

oraz odpowiednie ich różniczkowanie.

Po zróżniczkowaniu pierwszego z równań względem Y a drugiego względem X otrzymujemy:

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

co pozwala zapisać:

$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} = 0$$

Ponieważ założyliśmy, że gęstość jest jednorodna:

$$\rho = \text{idem}$$

stąd też zależność powyższa upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial(X)}{\partial y} - \frac{\partial(Y)}{\partial x} = 0$$

Przez analogię uzyskać możemy następujące związki, łączące ze sobą poszczególne składowe jednostkowej siły masowej:

$$\frac{\partial(X)}{\partial y} - \frac{\partial(Y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(Y)}{\partial z} - \frac{\partial(Z)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(Z)}{\partial x} - \frac{\partial(X)}{\partial z} = 0$$

które są warunkami zerowej rotacji wektora \vec{F} :

$$\text{rot} \left(\vec{F} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Jeżeli wektor jednostkowej siły masowej spełnia warunek (4.4) wówczas istnieje pewna funkcja:

$$\phi(x, y, z) \quad (4.5)$$

którą nazwać możemy *funkcją siły masowej* i która związana jest ze składowymi wektora \vec{F} następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Związek powyższy wyprowadzić można również e sposób uproszczony, stosując zasadę prac wirtualnych do równania Eulera, tzn. mnożąc składowe tego równania przez odpowiednie przyrosty po kierunkach osi współrzędnych:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad | \cdot dx \\ Y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad | \cdot dy \\ Z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad | \cdot dz \end{aligned}$$

co po zsumowaniu daje:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest różniczką zupełną ciśnienia, co pozwala zapisać:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} dp \quad (4.7)$$

Jeżeli prawa strona powyższej zależności jest różniczką zupełną, to także i strona lewa musi być różniczką zupełną pewnej funkcji (np. funkcji danej wzorem (4.5)) i wówczas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho} dp$$

co po porównaniu lewych stron powyższej zależności i wzoru (4.7) daje warunki zapisane wzorem (4.6).

Warunek bezwirowości pola sił masowych narzuca wymóg, aby jakikolwiek element masy znajdującej się w tym polu nie wykonywał ruchu obrotowego wokół swego środka masy. Wobec dużej wartości promienia kuli ziemskiej linie działania sił grawitacyjnych można uznać za praktycznie równoległe w obrębie mas płynu, które mogą być przedmiotem rozważanych przez nas zastosowań technicznych (rurociągi, zbiorniki). Oznacza to z kolei, że warunki bezwirowości dla pola grawitacyjnych sił masowych dane wzorem (4.6) będą spełnione, co umożliwi z kolei uzyskanie rozwiązania równania Eulera.

4.3. Opis równowagi płynu nieruchomego w polu sił grawitacyjnych

Warunki (4.6) nazywane są warunkami *potencjalności pola wektorowego*, gdyż funkcja $\phi(x, y, z)$ spełnia warunek:

$$\vec{F} = \text{grad } \phi$$

co oznacza, że *pole sił masowych ma potencjał*. Funkcji danej wzorem (4.5) nie nazwaliśmy jednak funkcją potencjału wprowadzając zamiast niej pojęcie funkcji sił masowych a powodem takiego rozróżnienia jest przeciwny zwrot działania potencjału grawitacyjnego w stosunku do przyjętego przez nas zwrotu osi z (patrz rys. 4.1). Dlatego też nazwy *funkcji potencjału sił masowych* używać będziemy dla funkcji U_p , która z funkcją sił związana będzie następującym warunkiem:

$$U_p(x, y, z) = -\phi(x, y, z) \quad (4.8)$$

Uwzględniając wzór (4.8) w zależności (4.6) otrzymamy następujące związki między składowymi jednostkowej siły masowej i funkcją potencjału:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial U_p}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial U_p}{\partial y} \\ Z &= -\frac{\partial U_p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.9)$$

co po podstawieniu do wzoru (4.7) pozwoli zapisać:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial x} dx - \frac{\partial U_p}{\partial y} dy - \frac{\partial U_p}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho} dp$$

a po uwzględnieniu, że lewa strona jest różniczką zupełną funkcji potencjału otrzymamy:

$$dU_p = -\frac{1}{\rho} dp \quad (4.10)$$

Scałkowanie powyższej zależności prowadzi do związku:

$$p = -\rho U_p + C \quad (4.11)$$

gdzie C jest dowolną stałą, a związek (4.11) oznacza, że *plyn nieściśliwy pod działaniem sił masowych jest w równowadze, jeżeli siły masowe mają potencjał*. Związek między siłami masowymi i potencjałem ma postać:

$$\vec{F} = -\text{grad } U_p \quad (4.11a)$$

W zależności (4.11) należy wyznaczyć wartość stałej, co wymaga znajomości w punkcie $A_0(x_0, y_0, z_0)$ zarówno ciśnienia

$$p_0 = p(x_0, y_0, z_0)$$

jak i wartości potencjału

$$U_{p_0} = U_p(x_0, y_0, z_0)$$

co po podstawieniu do wz. (4.11)

$$p_0 = -\rho U_{p_0} + C$$

pozwała wyznaczyć wartość stałej:

$$C = p_0 + \rho U_{p_0}$$

Podstawienie powyższej wartości do (4.11) daje ostatecznie związek:

$$p - p_0 = \rho(U_{p_0} - U_p) \quad (4.12)$$

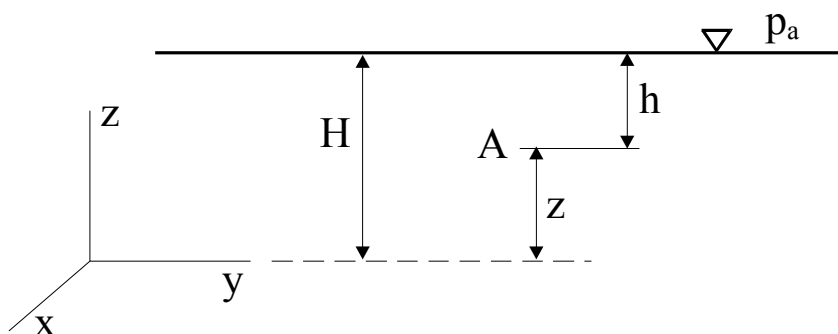
pozwalający jednoznacznie określić ciśnienie poruszające się w dowolnym punkcie $A(x, y, z)$ jeżeli tylko znana jest funkcja potencjału sił masowych $U_p(x, y, z)$.

Przeanalizujemy równowagę jednorodnej cieczy o gęstości ρ , której swobodna powierzchnia jest położona na wysokości H nad płaszczyzną xy kartezjańskiego układu współrzędnych jak pokazano na rys. 4.2. Dla rozpatrywanego układu składowe jednostkowej siły masowej wynosić będą:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g$$

co po podstawieniu do wz. (4.9) redukuje równanie Eulera do związku:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial z} = -g$$



Rys.4.2. Równowaga hydrostatyczna wydzielonej objętości cieczy w polu sił ciężkości.

z którego po scałkowaniu otrzymujemy wyrażenie na potencjał sił ciężkości:

$$U_p = g z \quad (4.13)$$

Po podstawieniu U_p do wz. (4.11) otrzymujemy związek opisujący ciśnienie:

$$p = -\rho g z + C \quad (4.14)$$

z którego wynika, że w płynie nieściśliwym, znajdującym się w stanie równowagi w polu sił ciężkości powierzchnie stałego ciśnienia są płaszczyznami poziomymi tę samą własność wykazują również powierzchnie ekwipotencjalne (stałego potencjału – patrz wz. (4.13)).

Wartość stałej C w zal. (4.14) wyznaczyć można na swobodnej powierzchni, dla której przyjąć można:

$$z = H; \quad p = p_a$$

gdzie p_a jest ciśnieniem na swobodnej powierzchni (atmosferycznym). Po podstawieniu powyższych wartości do wz. (4.14) otrzymujemy:

$$p_a = -\rho g \cdot H + C$$

skąd wartość stałej

$$C = p_a + \rho \cdot g \cdot H$$

po podstawieniu do (4.14) daje:

$$p = p_a + \rho \cdot g \cdot H - \rho \cdot g \cdot z$$

Po przekształceniu

$$p = p_a + \rho \cdot g \cdot (H - z)$$

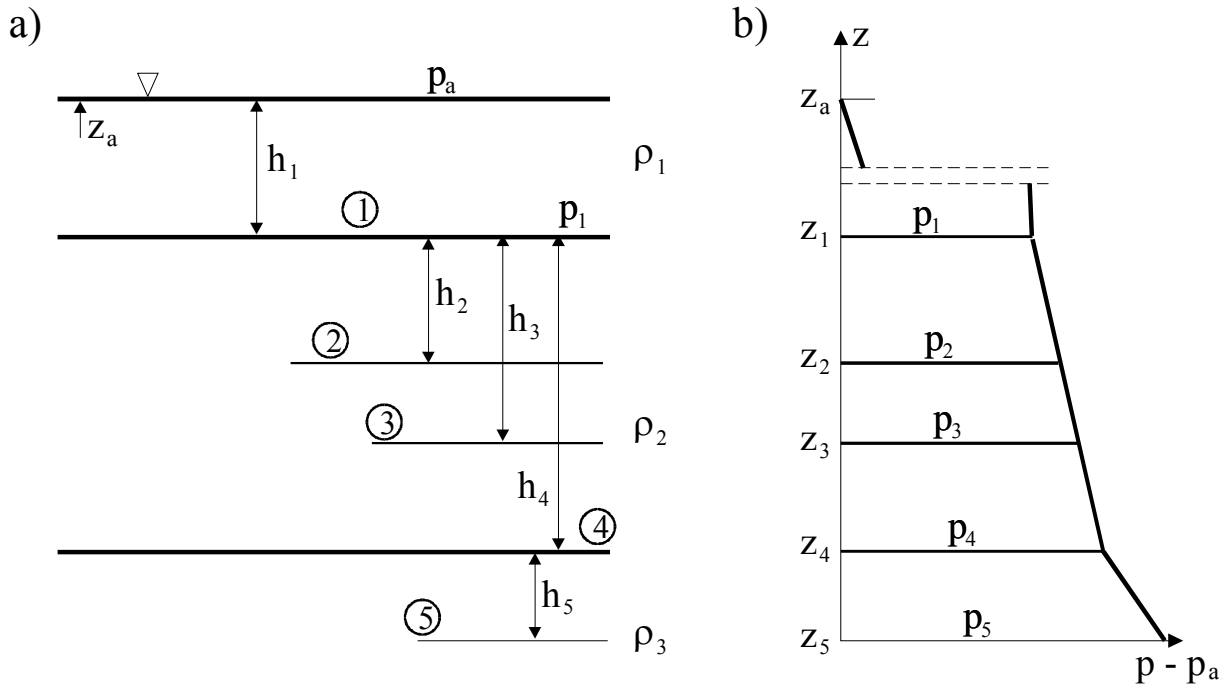
i uwzględnieniu oznaczeń z rys. 4.2 otrzymujemy ostatecznie wyrażenie na wartość ciśnienia w dowolnym punkcie nieruchomej cieczy znajdującej się w polu sił ciężkości:

$$p = p_a + \rho \cdot g \cdot h \quad (4.15)$$

w którym h oznacza głębokość zanurzenia danego punktu. Zależność ta wykazuje, że ciśnienie w dowolnym punkcie nieruchomej cieczy jest równe sumie ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia słupa cieczy o gęstości ρ i wysokości h zwanego ciśnieniem hydrostatycznym.

Zależność powyższą można uogólnić na pokazany na rys. 4.3a przypadek równowagi kilku nie mieszających się cieczy, z których najlżejsza o gęstości ρ_1 tworzy warstwę o grubości h_1 ze swobodną powierzchnią na której ciśnienie wynosi p_a . Kolejna warstwa cieczy o gęstości ρ_2 ma grubość h_2 i poniżej współrzędnej z_2 mamy ciecz o gęstości ρ_3 przy czym równowaga trwała takiego układu istnieć będzie jedynie wówczas, gdy:

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 \quad (4.16)$$



Rys.4.3. Równowaga kilku nie mieszających się cieczy w polu sił ciężkości a) oraz panujący w układzie rozkład ciśnienia hydrostatycznego b).

W analizowanym układzie oprócz swobodnej powierzchni między cieczą o gęstości ρ_1 i atmosferą istnieją też powierzchnie które rozgraniczają nie mieszające się cieczy o gęstościach odpowiednio ρ_1 i ρ_2 oraz ρ_2 i ρ_3 , nazywane *powierzchniami rozdziału*. Powierzchnie rozdziału podobnie jak powierzchnia swobodna są płaszczyznami ekwipotencjalnymi, gdyż w polu sił ciężkości powierzchnie stałego potencjału i ciśnienia są płaszczyznami poziomymi. W cieczach tych rozmieszczono pięć punktów oznaczonych kolejnymi numerami, w których należy obliczyć panujące tam ciśnienia. Ciśnienie w punkcie 1 jest równe:

$$p_1 = p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

natomiast w kolejnych punktach wynosi:

$$p_2 = p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 = p_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

$$p_3 = p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_3 = p_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_3$$

$$p_4 = p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_4 = p_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_4$$

$$p_5 = p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h_4 + \rho_3 \cdot g \cdot h_5 = p_4 + \rho_3 \cdot g \cdot h_5$$

Zależności te wykazują, że ciśnienie w dowolnym punkcie rozważanego układu składającego się z warstw cieczy o różnych gęstościach obliczać można na dwa sposoby. Pierwszy sposób to definicyjna zależność (4.15) zgodnie z którą *ciśnienie w dowolnym punkcie układu cieczy jest sumą ciśnienia atmosferycznego oraz sumy ciśnień hydrostatycznych słupów cieczy pomiędzy danym punktem i swobodną powierzchnią*.

Sposób drugi daje *ciśnienie w danym punkcie jako sumę ciśnienia panującego na najbliższej powierzchni rozdziału ponad punktem i ciśnienia hydrostatycznego słupa cieczy pomiędzy punktem i najbliższą powierzchnią rozdziału znajdującą się ponad punktem*.

Warto zauważyć, że różnica ciśnień w dwóch punktach znajdujących się w obrębie warstwy tego samego płynu może być obliczana w prosty sposób, np.:

$$p_3 - p_2 = \rho_2 \cdot g \cdot (h_3 - h_2)$$

tn. równa jest różnicy ciśnień hydrostatycznych między tymi punktami i nie zależy od rozkładu ciśnień w analizowanym układzie.

Rozkład ciśnienia w rozważanym układzie kilku cieczy pokazany na rys. 4.3b wykazuje, że w obrębie cieczy o jednakowej gęstości ciśnienie zmienia się liniowo wraz z głębokością zanurzenia zgodnie z zal. (4.15). Ponieważ iloczyn gęstości cieczy i przyspieszenia ziemskiego jest współczynnikiem proporcjonalności między głębokością zanurzenia i ciśnieniem, stąd też wraz ze wzrostem gęstości w kolejnych warstwach zmienia się nachylenie linii zmiany ciśnienia co ująć można zależnością:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{\rho=\rho_3} > \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{\rho=\rho_2} > \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{\rho=\rho_1}$$

co odpowiada warunkowi (4.16).

W niektórych zastosowaniach wygodniej jest posługiwać się zależnością (4.15) przekształconą do postaci:

$$\frac{p}{\rho \cdot g} = \frac{p_a}{\rho \cdot g} + h \quad (4.17)$$

w której wszystkie człony mają wymiar długości i nazywane są *wysokością ciśnienia*.

Przedstawiają one wysokości słupów cieczy, które dawałyby ciśnienie hydrostatyczne odpowiadające ciśnieniu w analizowanym punkcie, ciśnieniu atmosferycznemu i ciśnieniu hydrostatycznemu.

Porównanie wz. (4.15) i (4.17) wykazuje, że definicyjna zależność na ciśnienie hydrostatyczne

$$\rho \cdot g \cdot h$$

może być również interpretowana jako *ciężar jednostkowego słupa cieczy* tzn. ciężar słupa cieczy o wysokości h i jednostkowym polu podstawy.

4.4. Wnioski z analizy równania Eulera

Poprzednie rozdziały poświęcone były opisowi równowagi płynu jednorodnego (nieściśliwego) w polu sił ciężkości. Opisujące ten stan równanie Eulera pozwoliło sformułować dwa najistotniejsze wnioski, z których pierwszy wynika wprost z analizy tego równania. Jeżeli bowiem równanie Eulera zapisane jest w postaci wektorowej:

$$\text{grad } p = \rho \vec{F}$$

wówczas wynika stąd, iż *ciśnienie rośnie w kierunku działania sił masowych*. Jeżeli natomiast zapiszemy je w postaci układu równań skalarnych:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

wówczas wynikać stąd będzie, że przyrost ciśnienia wzdłuż dowolnego kierunku jest proporcjonalny do wartości rzutu jednostkowej siły masowej na dany kierunek.

Drugi wniosek wynika z równania równowagi zapisanego dla płynu znajdującego się w polu oddziaływania potencjalnych sił masowych:

$$p - p_o = \rho (U_{p_o} - U_p) \quad (4.12)$$

Z zależności tej wynika *liniowy związek między potencjałem sił masowych i ciśnieniem* a ponadto dla

$$U_p = \text{idem}$$

otrzymujemy:

$$p = \text{idem}$$

co oznacza, że powierzchnie ekwipotencjalne są jednocześnie powierzchniami izobarycznymi (stałego ciśnienia). Własność tę wykorzystywaliśmy przy analizie stanu równowagi płynu, w którym występowały powierzchnie swobodne i powierzchnie rozdziału.

Kolejny, ważny wniosek wynika z analizy równania równowagi zapisanego w postaci:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} dp \quad (4.7)$$

które dla powierzchni swobodnej lub powierzchni rozdziału spełniającej warunek stałości ciśnienia:

$$p(x, y, z) = 0$$

zapisać można:

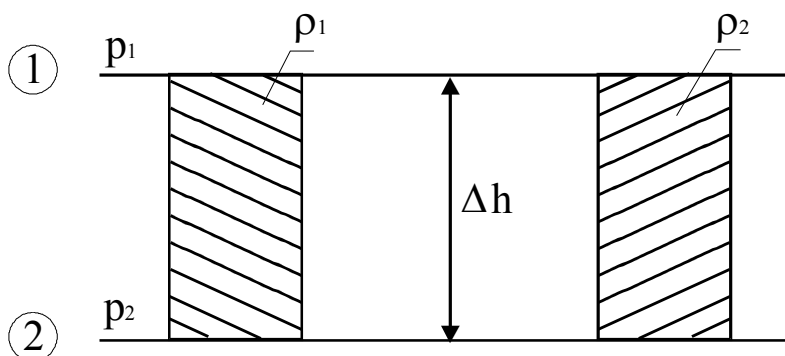
$$dp = 0$$

co oznacza, że równanie równowagi zapisane być może następująco:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Wyrażenie po lewej stronie równania przedstawia elementarną pracę sił masowych, co pozwala stwierdzić, że na powierzchni swobodnej (rozdziálu) siły masowe wykonują zerową pracę co oznacza, że siły masowe są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Wynika stąd, że nasze założenie, iż powierzchnie swobodne i rozdziału były płaszczyznami poziomymi, było słuszne.

W rozdziale poprzednim analizowaliśmy również przypadek równowagi nie mieszających się płynów o różnej gęstości przyjmując intuicyjnie, że między poziomymi (i wzajemnie równoległymi) płaszczyznami rozdziału znajdowała się ciecz o jednakowej gęstości. Sprawdźmy, czy możliwe jest występowanie cieczy o niejednorodnej gęstości między powierzchniami jednakowego ciśnienia, rozpatrując równowagę warstwy płynu pokazanej na rys. 4.4.



Rys.4.4. Równowaga warstwy płynu niejednorodnego.

Warstwa płynu o grubości Δh zawarta jest między dwiema poziomymi płaszczyznami, na których ciśnienie wynosi odpowiednio p_1 i p_2 . Wewnątrz warstwy znajdują się dwa nie mieszające się płyny o gęstościach ρ_1 i ρ_2 . Rozpatrzmy dwa prostopadłościany pokazane na rysunku, dla których warunki równowagi zapisać można następująco:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_2 - p_1 = \rho_2 \cdot g \cdot \Delta h$$

Warunki te mogą być jednocześnie spełnione tylko wówczas, jeżeli:

$$\rho_1 = \rho_2$$

Odległość między warstwami Δh może być dowolnie mała a wewnątrz tych warstw rozmieścić można dowolnie wiele takich graniastosłupów dla których jednocześnie musiałyby być spełnione warunki zapisane powyżej. Oznacza to, że w układzie wielu nie mieszających

się cieczy równowaga jest możliwa tylko wtedy, gdy gęstość płynu w każdej poziomej warstwie pozostaje stała.

Równanie Eulera pozwala również wyznaczyć kształt powierzchni rozdziału dla dwóch nie mieszających się cieczy, która wobec zachodzącego tutaj skoku gęstości tej jest powierzchnią nieciągłości. Wobec nieskończonej małej grubości tej powierzchni jednakowe są siły ciśnieniowe i masowe dla obydwu płynów co pozwala zapisać:

$$dp = \rho_1 (Xdx + Ydy + Zdz) = \rho_2 (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Ponieważ gęstości obydwu płynów są różne, tzn.:

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

stąd też powyższa równość może być spełniona tylko wtedy, gdy:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

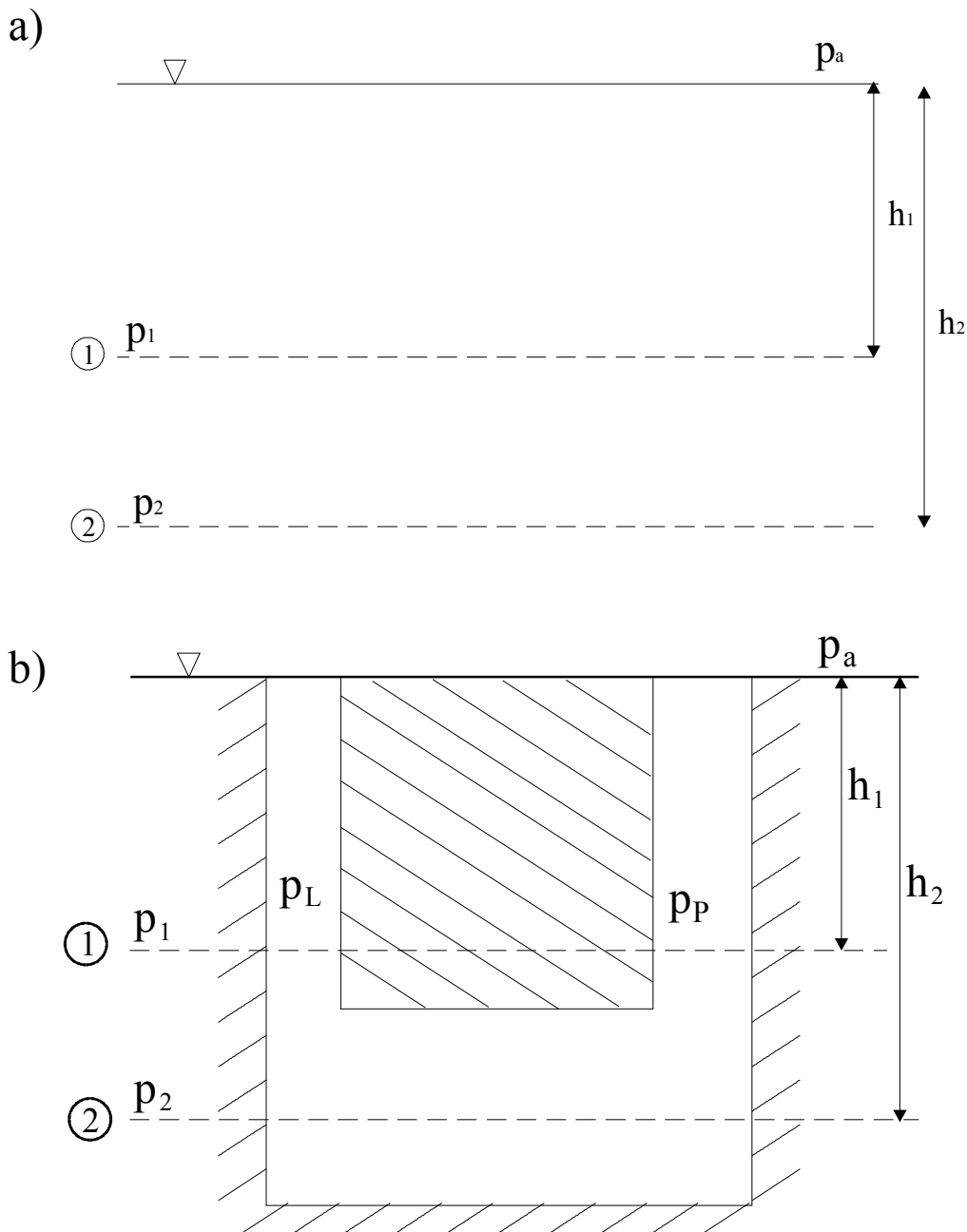
z czego wynika, że na powierzchni rozdziału mamy:

$$dp = 0$$

Oznacza to, że *powierzchnia rozdziału dwóch nie mieszających się płynów o stałych gęstościach (nieściśliwych) jest powierzchnią stałego potencjału i jednakowego ciśnienia.*

4.5. Równowaga cieczy w naczyniach połączonych

Dotychczas zajmowaliśmy się równowagą cieczy w pojedynczych zbiornikach, podczas gdy w wielu praktycznych zastosowaniach mamy ciecz wypełniającą układy zbiorników, rurociągów lub też wypełniającą przestrzenie w złożach porowatych.



Rys.4.5. Równowaga cieczy jednorodnej w pojedynczym zbiorniku a) i w układzie naczyń połączonych b).

Dla wyjaśnienia, czy wyprowadzone w rozdziałach poprzednich zależności wynikające z równania Eulera będą opisywać równowagę nieruchomej cieczy także i w układach złożonych, konieczne będzie zastosowanie pewnego sposobu rozumowania nazywanego *postulatem Stevina* lub *zasadą zeszywnienia*. Zasadę tę można sformułować następująco: „...jeżeli pewną część przestrzeni wypełnionej nieruchomym płynem zeszywnimy w taki sposób, aby gęstość zeszywnionej objętości nie uległa zmianie to równowaga płynu nie zostanie zakłócona”.

Przyjrzyjmy się pewnej objętości cieczy o gęstości ρ pokazanej na rys, 4.5a, w której wydzielamy dwie płaszczyzny poziome, na których ciśnienie wynosi odpowiednio:

$$p_1 = p_a + \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot h_2$$

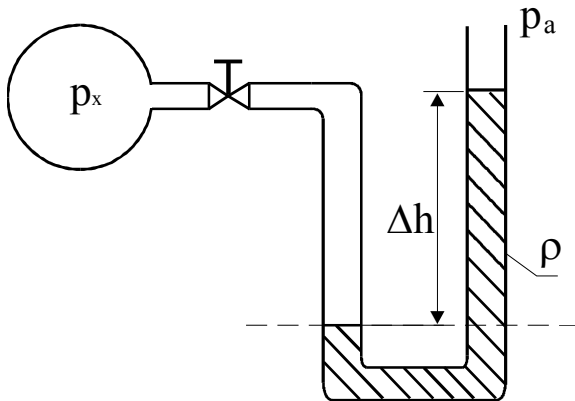
Wyobraźmy sobie teraz, że zeszywnieniu podlegają zakreskowane na rys. 4.5b fragmenty objętości w wyniku czego powstają dwa pionowe naczynia połączone ze sobą. Zeszywnienie

przeprowadzono „myślowo” ale zgodnie z postulatem Stevina, stąd też równowaga cieczy nie uległa zakłóceniu i w dalszym ciągu w płaszczyznach 1 i 2 panują ciśnienia obliczone powyżej. W płaszczyźnie 2 ciśnienie jest w sposób oczywisty jednakowe i równe p_2 , natomiast w płaszczyźnie 1 ciśnienie wynosi p_1 w tych obszarach, gdzie płaszczyzna przechodzi przez nie zeszywnioną ciecz. Jeżeli ciśnienia panujące w lewym i prawym naczyniu oznaczymy odpowiednio indeksami „L” i „P” wówczas będziemy mogli zapisać:

$$p_L = p_P = p_1 = p_a + \rho \cdot g \cdot h_1$$

Zilustrowaliśmy w ten sposób *zasadę naczyń połączonych*, która brzmi następująco: „...w jednorodnej cieczy wypełniającej w sposób ciągły przestrzeń składającą się z naczyń połączonych, ciśnienia w płaszczyznach poziomych są jednakowe” co ująć można wzorem:

$$p_L = p_P \quad (4.18)$$



Rys.4.6. Zastosowanie zasady naczyń połączonych do wyznaczania ciśnienia.

Zasada ta znajduje praktyczne zastosowanie przy pomiarze ciśnień co pokazano na rys. 4.6, gdzie do zbiornika, w którym panuje nieznane ciśnienie p_x podłączono układ dwóch połączonych ze sobą naczyń. Ponieważ lewe ramię połączone jest ze zbiornikiem, stąd też nad swobodną powierzchnią panuje ciśnienie p_x , natomiast nad swobodną powierzchnią w prawej gałęzi mamy ciśnienie atmosferyczne p_a . Jeżeli wybierzemy płaszczyznę przechodzącą przez swobodną powierzchnię w lewej gałęzi (linia przerywana na rys. 4.6), wtedy ciśnienie w lewej i prawej gałęzi zapisać będzie można:

$$p_L = p_x$$

$$p_P = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

gdzie ρ oznacza gęstość cieczy (znana) a h jej wysokość nad przyjętą płaszczyzną.

Z zasady naczyń połączonych:

$$p_L = p_P$$

skąd obliczyć można ciśnienie w zbiorniku:

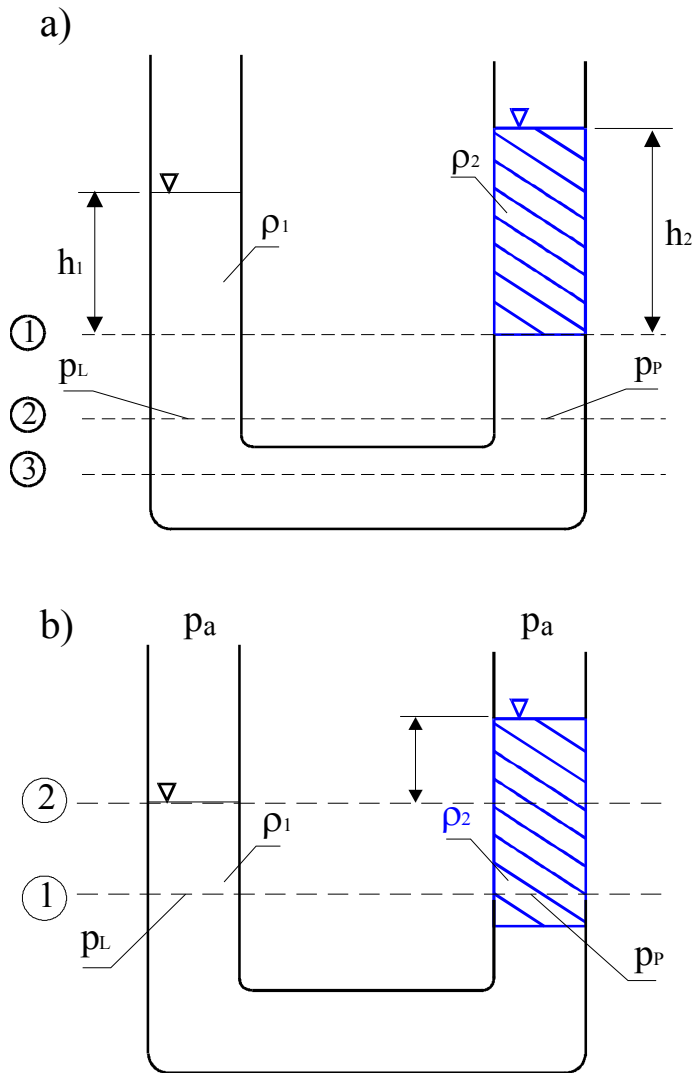
$$p_x = p_a + \rho \cdot g \cdot h$$

Pokazany tu przyrząd nazywany manometrem cieczowym lub U-rurką (od kształtu naczynia) używany jest powszechnie do pomiaru ciśnień tzw. metodą różnicową, gdyż mierzy on różnicę ciśnień podanych do lewej i prawej gałęzi przyrządu, co w analizowanym przypadku zapisać można następująco:

$$p_x - p_a = \rho \cdot g \cdot h$$

Jeżeli znana będzie różnica ciśnień podanych do lewej i prawej gałęzi manometru, wówczas z zależności podanej powyżej obliczyć będziemy mogli gęstość cieczy wypełniającej przyrząd.

Zasadę naczyń połączonych można również stosować do układów wypełnionych różnymi, ale nie mieszającymi się cieczami, czego przykład pokazano na rys. 4.7a.



Rys.4.7. Równowaga dwóch nie mieszających się cieczy w naczyniach połączonych.

W prawej gałęzi naczynia nad cieczą o gęstości ρ_1 znajduje się warstwa cieczy o mniejszej gęstości ρ_2 i jeżeli wybierzemy płaszczyznę poziomą pokrywającą się z płaszczyzną rozdziału cieczy, wówczas wysokości słupów cieczy nad płaszczyzną będą równe odpowiednio h_1 i h_2 jak pokazano na rysunku. W lewej gałęzi naczynia ciśnienie w wybranej płaszczyźnie wynosić będzie:

$$p_L = p_a + \rho_1 \cdot h_1 \cdot g$$

natomiast w gałęzi prawej:

$$p_P = p_a + \rho_2 \cdot h_2 \cdot g$$

Stosując zasadę naczyń połączonych zapisać można:

$$p_a + \rho_1 \cdot h_1 \cdot g = p_a + \rho_2 \cdot h_2 \cdot g$$

skąd po przekształceniach:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.19)$$

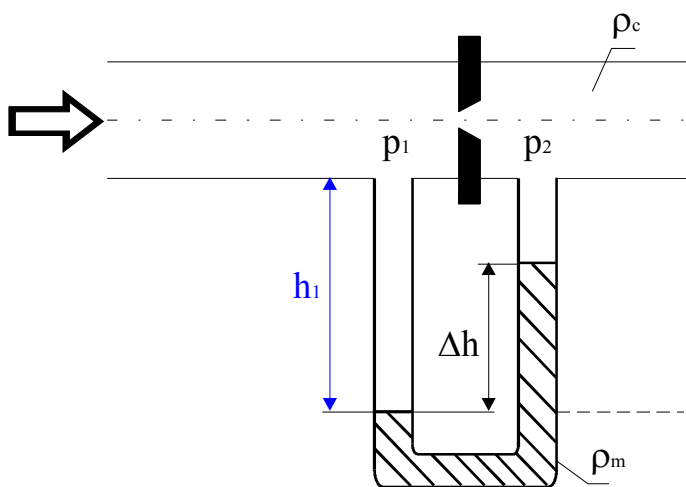
otrzymujemy ważny wniosek, że wysokości słupów dwóch nie mieszających się cieczy nad płaszczyzną rozdziału są w naczyniach połączonych odwrotnie proporcjonalne do gęstości cieczy. Zależność (4.19) może być stosowana do wyznaczania gęstości cieczy tzw. metodą referencyjną, tzn. względem znanej gęstości jednej z cieczy.

Przy stosowaniu zasady naczyń połączonych do układów różnych cieczy należy pamiętać, że *płaszczyzna względem której obliczamy ciśnienie musi przechodzić przez tę samą ciecz*, gdyż tylko w tym przypadku słuszny jest wz. (4.17). Założenie to było spełnione przy wyprowadzaniu wz. (4.19), gdyż płaszczyna rozdziału należy zarówno do obszaru cieczy o gęstości ρ_1 jak i ρ_2 . Na rys. 4.7a pokazano przykładowo trzy płaszczyny poziome, dla których spełniona będzie zasada naczyń połączonych, włączając w to płaszczynę nr 1 przechodzącą przez powierzchnię rozdziału. Na rys. 4.7b pokazano natomiast płaszczynę nr 1 dla której nie można stosować zasady naczyń połączonych, przy czym dla wykazania prawdziwości tego stwierdzenia zastosujemy zasadę *reductio ad absurdum* (sprowadzenie do niedorzeczności). Jeżeli bowiem zasada naczyń połączonych byłaby spełniona dla płaszczyny nr 1 z rys. 4.7b, to byłaby ona słuszna także i dla płaszczyny nr 2, dla której ciśnienia w lewej i prawej gałęzi wynoszą:

$$p_L = p_a$$

$$p_P = p_a + \rho_2 h \cdot g$$

skąd jasno widać, że ciśnienia te nie spełniają warunku (4.18).



Rys.4.8. Zastosowanie zasady naczyń połączonych do pomiaru różnicy ciśnień na kryzie.

Zastosowanie zasady naczyń połączonych do układów nie mieszających się cieczy mogą dotyczyć bardzo złożonych przypadków, czego przykład pokazano na rys. 4.8. Przedstawiono tutaj pomiar natężenia przepływu cieczy przy pomocy zwężki, która wstawiona do rurociągu wytwarza różnicę ciśnień:

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

proporcjonalną do wydatku przepływającej cieczy. Jeżeli rurociągiem przepływa ciecz o gęstości ρ_c a gęstość cieczy manometrycznej wynosi ρ_m , wówczas dla płaszczyny zaznaczonej na rys. 4.8 linią przerywaną napisać można:

$$p_L = p_1 + \rho_c \cdot h_1 \cdot g$$

$$p_P = p_2 + \rho_c \cdot (h_1 - \Delta h) \cdot g + \rho_m \Delta h \cdot g$$

a po wykorzystaniu wz. (4.17) i elementarnych przekształceniach otrzymujemy:

$$\Delta p = (\rho_m - \rho_c) g \cdot \Delta h$$

z której to zależności wynika, że do obliczenia różnicy ciśnień Δp uwzględnić należy różnicę gęstości cieczy manometrycznej i cieczy przepływającej. Jedynie wówczas, gdy:

$$\rho_c \ll \rho_m$$

co spełnione jest np. gdy przepływającym płynem jest gaz, zależność powyższą uprościć można do postaci:

$$\Delta p \approx \rho_m \cdot g \cdot \Delta h.$$

tożsamej ze wzorem używanym w pomiarze ciśnienia metodą różnicową.

4.6. Poziom odniesienia przy pomiarze ciśnienia, ciśnienie atmosferyczne

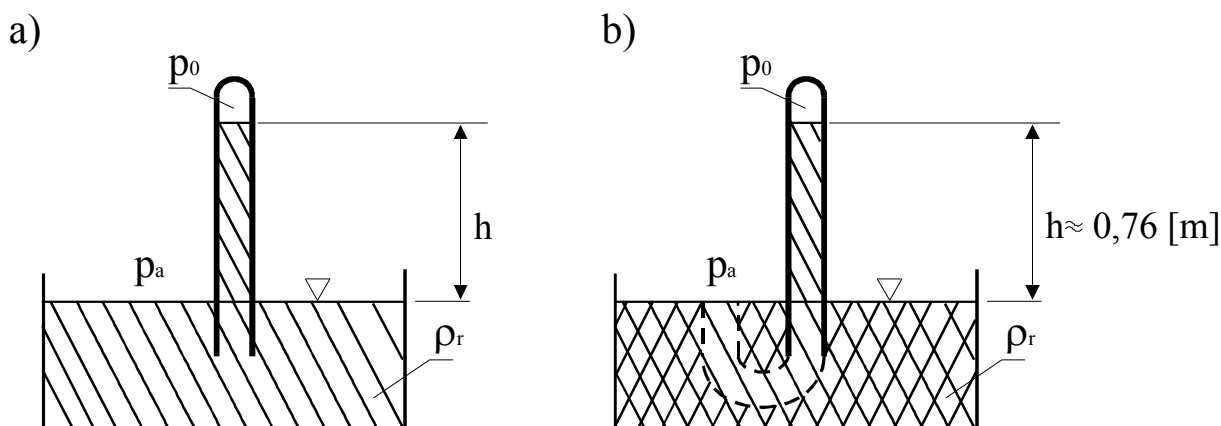
Powietrze atmosferyczne wywiera na wszystkie powierzchnie ciał znajdujących się na powierzchni Ziemi ciśnienie zwane *ciśnieniem atmosferycznym*. Znajomość wartości tego ciśnienia zawdzięczamy Torricellego, który w otwartym naczyniu z rtęcią zanurzał rurki szklane zasklepione u góry i napełnione całkowicie rtęcią. Jeżeli tylko długość rurki wystającej ponad zwierciadło rtęci (rys. 4.9a) przekraczała 0.76m wówczas w rurce pokazywała się swobodna powierzchnia rtęci, której wysokość ponad powierzchnię zwierciadła w naczyniu była stała mimo dalszego zwiększania długości rurki. Torricelli założył, że rtęć w temperaturze otoczenia nie paruje co oznaczało, że nad zwierciadłem w rurce powinna panować próżnia. Jeżeli zastosujemy zasadę zeszywnienia w sposób pokazany na rys. 4.9b, tzn. zeszywnimy objętości zaznaczone kratkowaniem i przyjmiemy jako poziom odniesienia zwierciadło rtęci w zbiorniku, wówczas dla powstałego w ten sposób układu naczyń połączonych będzie można zapisać:

- dla lewej gałęzi:

$$p_L = p_a$$

- dla prawej gałęzi

$$p_P = p_o + \rho \cdot g \cdot h$$



Rys.4.9. Barometr Torricellego

Przyjmując, że ciśnienie próżni

$$p_o = 0$$

otrzymujemy z warunku równowagi naczyń połączonych:

$$p_a = \rho \cdot g \cdot h$$

a podstawiając gęstość rtęci

$$\rho = 13600 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

i wysokość słupa odpowiadającą ciśnieniu wywieranemu przez tzw. atmosferę fizyczną:

$$h = 0.76 \text{ m}$$

otrzymujemy ciśnienie atmosferyczne równe:

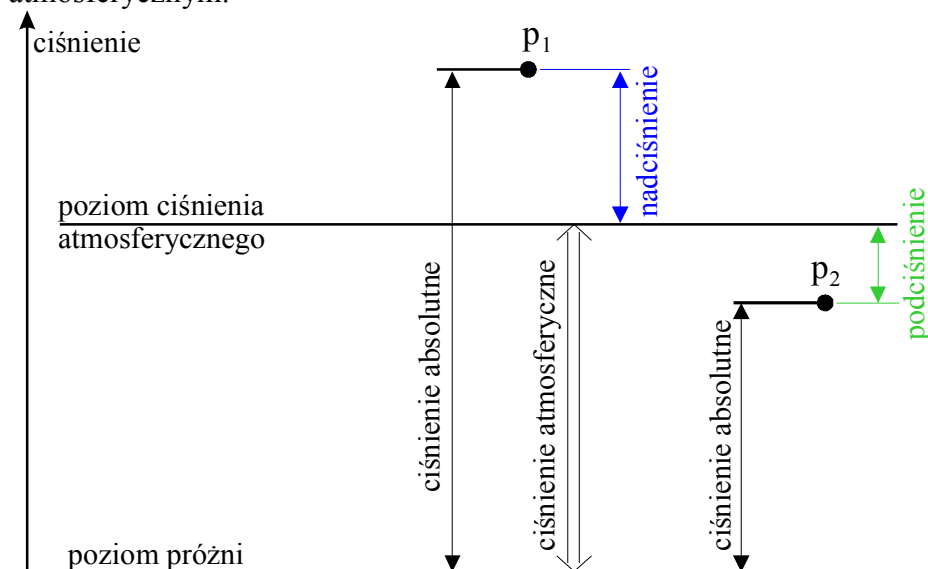
$$p_a = 101366 \text{ [Pa]} \cong 1013 \text{ [hPa]}$$

Przedstawiony na rys. 4.9 przyrząd nazywany *barometrem* używany jest także i dziś do pomiaru ciśnienia atmosferycznego, chociaż jego dokładność jest dalece już niewystarczająca dla potrzeb współczesnej meteorologii. Warto również zwrócić uwagę na doskonałą intuicję

Torricellego, który założył zerowe ciśnienie par rtęci w warunkach otoczenia. Współczesne pomiary wykazują, że nad powierzchnią rtęci w zamkniętej rurce ciśnienie wynosi zaledwie:

$$p_o = 0.16 \text{ [Pa]}$$

w temperaturze 20° C, co z zadowalającą dla praktyki dokładnością pozwala przyjąć, że ciśnienie wyznaczone w eksperymencie Torricellego było rzeczywiście ciśnieniem atmosferycznym.



Rys.4.10. Poziomy odniesienia przyjmowane przy określaniu ciśnienia.

W zastosowaniach naczyń połączonych omawianych w rozdziale poprzednim ciśnienie wyznaczono względem ciśnienia atmosferycznego, które panowało w jednym z ramion układu. W barometrze ciśnieniem odniesienia jest natomiast zerowe ciśnienie próżni i dla uniknięcia nieporozumień konieczne jest przyjęcie jednolitego nazewnictwa dla wyznaczonego przez nas ciśnienia. Na rys. 4.10 pokazano dwa wyniki pomiaru ciśnienia równe odpowiednio:

$$p_1 > p_a$$

$$p_2 < p_a$$

Jeżeli dla określenia wartości tych ciśnień przyjmujemy poziom próżni, wówczas będą to *ciśnienia absolutne*, przy czym obydwa te ciśnienia będą dodatnie (ciśnienie absolutne nie może być oczywiście ujemne). Te same ciśnienia określone względem ciśnienia atmosferycznego będą dodatnie (ciśnienie p_1) lub ujemne (ciśnienie p_2) i nazywane będą odpowiednio *nadciśnieniem* i *podciśnieniem*, co pokazano również na rys. 4.10. W większości zastosowań technicznych określamy ciśnienie względem ciśnienia atmosferycznego używając jednak nazwy ciśnienia i wyróżniając nad- i podciśnienie odpowiednim znakiem.

4.7. Prawo Pascala

Na rys. 4.11 pokazano przestrzeń wypełnioną jednorodnym płynem o gęstości ρ , zorientowaną kartezjańskim układem współrzędnych, w którym osie x oraz y tworzą płaszczyznę poziomą. Wybierzmy dwie płaszczyzny poziome, położone na wysokości z_o oraz z , dla których potencjały wynoszą odpowiednio U_{p_o} oraz U_p . Ciśnienia w punktach A i B wynoszą odpowiednio:

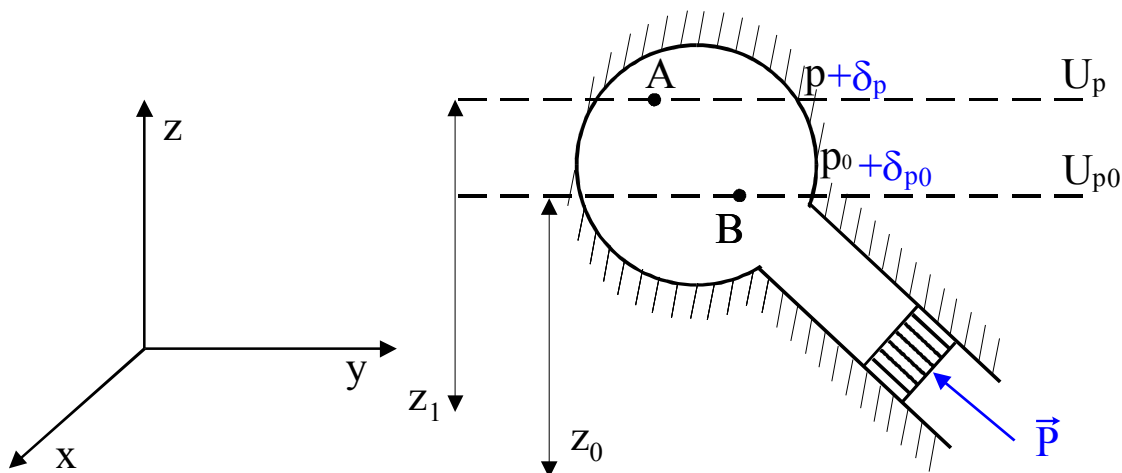
$$p_A = p$$

$$p_B = p_o$$

i zgodnie ze wz. (4.12) ciśnienia te związane są z wartościami potencjału zależnością:

$$p - p_o = \rho (U_p - U_{p_o})$$

Następnie zastosujemy zasadę zeszywnienia „zamrażając” zaznaczone na rysunku fragmenty płynu, dzięki czemu powstaje kulista objętość będąca odpowiednikiem szklanej kolby używanej w szkolnym doświadczeniu ilustrującym prawo Pascala (przesuwny tłok w szyjce kolby utworzony jest również przez zasadę zeszywnienia).



Rys.4.11. Prawo Pascala równomiernego rozchodzenia się przyrostu ciśnienia w płynie.

Jeżeli do tłoka przyłożymy siłę \vec{p} , wówczas w punktach A i B otrzymamy przyrosty ciśnienia δ_p i δ_{p_o} , co pozwala zapisać:

$$p_A = p + \delta_p$$

$$p_B = p_o + \delta_{p_o}$$

Ponieważ punkty A i B znajdują się nadal na tych samych płaszczyznach ekwipotencjalnych, więc różnica ciśnień będzie związana z różnicą potencjałów związkem:

$$(p + \delta_p) - (p_o + \delta_{p_o}) = \rho (U_p - U_{p_o})$$

co po przekształceniach pozwala zapisać:

$$(p - p_o) + (\delta_p - \delta_{p_o}) = \rho (U_p - U_{p_o})$$

Uwzględnienie zw. (4.12) pozwala stwierdzić, że wyrażenie będące różnicą przyrostów ciśnień musi być równe zero, tzn.:

$$\delta_p - \delta_{p_o} = 0$$

skąd wynika:

$$\delta_p = \delta_{p_o} \quad (4.20)$$

Ponieważ objętość płynu otoczona ośrodkiem zeszywnionym została wybrana w sposób całkowicie dowolny, stąd też wz. (4.20) pozwala stwierdzić, że *przyrost ciśnienia wywołany w dowolnym punkcie jednorodnego płynu ściśliwego, znajdującego się w stanie równowagi w potencjalnym polu sił masowych wywołuje identyczną zmianę ciśnienia w dowolnym punkcie tego płynu.*

Sformułowaliśmy w ten sposób *prawo Pascala* znane również jako *prawo równomiernego rozchodzenia się ciśnienia w płynie.*

Prawo to jest wykorzystywane w szeregu urządzeń, z których wymienić można prasy hydrauliczne, przy czym uproszczony szkic takiego urządzenia pokazano na rys. 4.12. Układ

naczyń połączonych tworzących prasę hydrauliczną składa się z dwóch cylindrów o polach przekroju poprzecznego równych odpowiednio S_A i S_B spełniających warunek:

$$S_B > S_A$$

Cylindry te zamknięte są tłokami i jeżeli do tłoka w cylindrze o polu przekroju S_A przyłożymy siłę F_A , wówczas dla utrzymania układu w równowadze koniecznym będzie przyłożenie do cylindra o polu przekroju S_B siły F_B . Ponieważ zgodnie z prawem Pascala przyrost ciśnienia wywołany przyłożeniem siły F_A rozchodzi się równomiernie w całej objętości, tzn.:

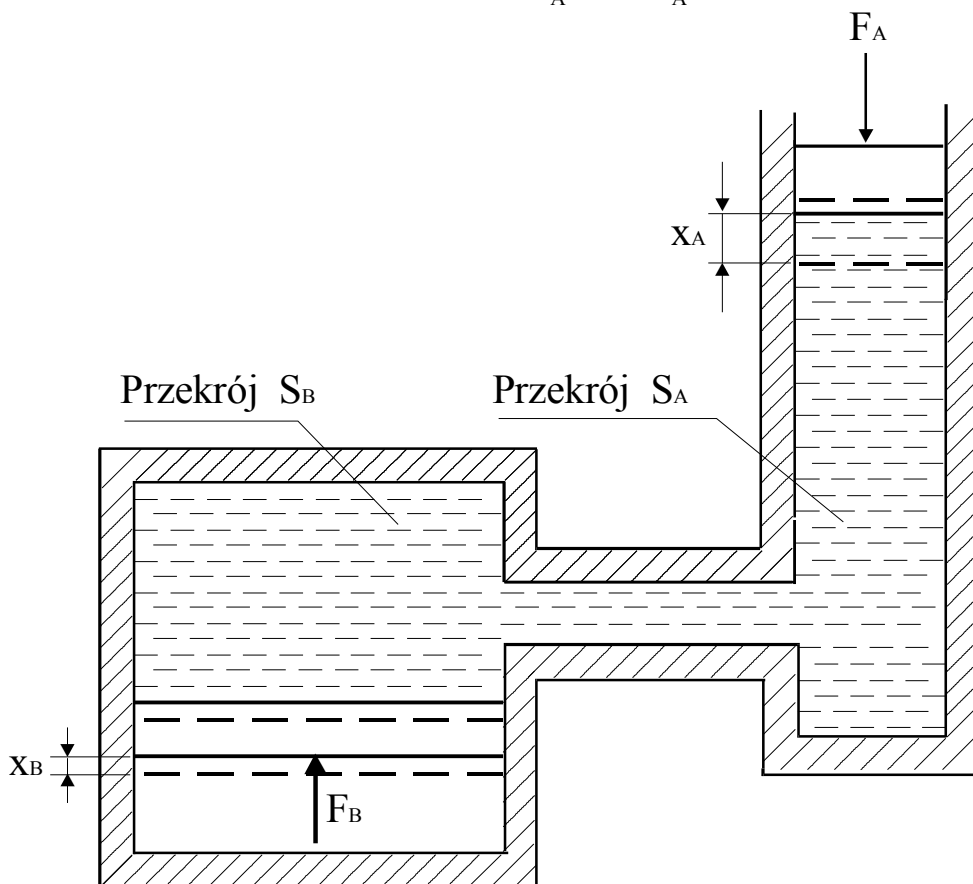
$$\delta_{PA} = \delta_{PB}$$

stąd też siła na tłoku w drugim cylindrze wynosić będzie:

$$F_B = \delta_{PA} \cdot S_B$$

co daje w wyniku:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{S_B}{S_A}$$



Rys.4.12. Schemat pras hydraulicznej.

Prasa hydrauliczna zwielokrotnia zatem siłę nacisku w proporcji równej stosunkowi pól tłoków, ale jednocześnie z warunku ciągłości wynika, że przesunięcia tłoków x_A oraz x_B spełniać muszą związek:

$$x_A \cdot S_A = x_B \cdot S_B$$

dzięki czemu zachowana jest równość prac wykonanych przez obydwie siły:

$$F_B \cdot x_B = F_A \cdot x_A$$

Należy zwrócić uwagę, że spotykana interpretacja prawa Pascala iż ciśnienie we wszystkich punktach płynu jest jednakowe jest wnioskiem sformułowanym błędnie. W każdym płynie ważkim znajdującym się w stanie równowagi w polu sił ciężkości ciśnienie

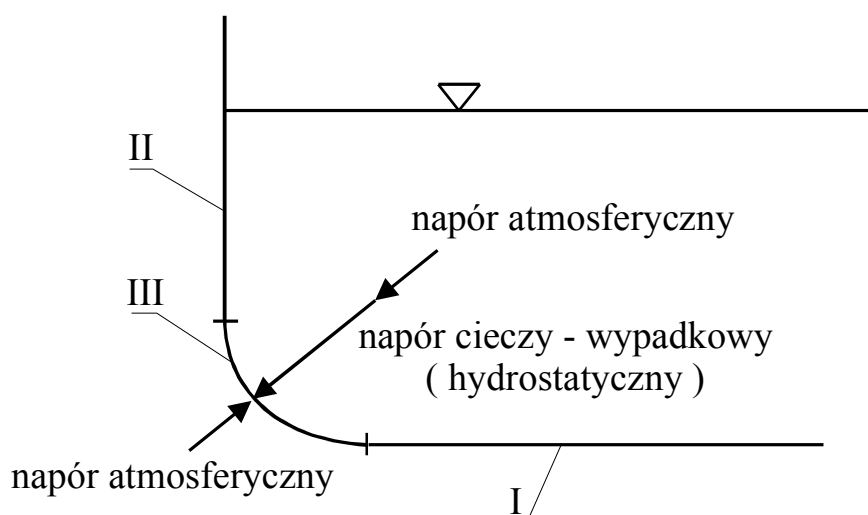
zmienia się w kierunku działania sił masowych zgodnie z równ. (4.12) i nie może być zatem jednakowe. Jeżeli jednak rozpatrujemy układ objętości płynu, w którym panuje duże ciśnienie wywołane np. przyłożeniem sił zewnętrznych, wówczas można pominąć zmienność ciśnienia wywołaną działaniem sił masowych co sprowadza się do przyjęcia następującego założenia:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

i przy takim założeniu możemy mówić o równości ciśnienia w całej objętości. Sformułowanie takie nie ma jednak nic wspólnego z prawem Pascala, które opisuje sposób rozchodzenia się *przyrostu ciśnienia*.

5. Napór hydrostatyczny

Płyn znajdujący się w stanie równowagi oddziałuje na ściany ograniczające rozpatrywaną jego objętość i siły te nazywane są *naporami hydrostatycznymi*. Omawiana problematyka ma wiele praktycznych zastosowań, przy czym tematykę niniejszego wykładu ograniczymy do zagadnień dotyczących obliczania naporów na ściany zbiorników zawierających ciecz jednorodną. Na rys. 5.1 pokazano zbiornik otwarty zawierający ciecz wywierającą napór, który od strony wewnętrznej jest sumą naporów pochodzących od ciśnień atmosferycznego i hydrostatycznego, podczas gdy od zewnątrz działa jedynie napór atmosfery.



Rys.5.1. Napór hydrostatyczny na ściany zbiornika.

Ponieważ działające z obu stron ściany napory od ciśnienia atmosferycznego równoważą się, stąd też w dalszych rozważaniach uwzględniać będziemy tylko napór hydrostatyczny, który jest siłą wypadkową pochodzącą od ciśnienia hydrostatycznego. Biorąc pod uwagę, że ciśnienie hydrostatyczne zmienia się wraz z głębokością obliczenia naporu wymagałoby w ogólnym przypadku całkowania naporów elementarnych z uwzględnieniem wielkości powierzchni i przestrzennej orientacji ścian. Dla uproszczenia rozważymy jednak trzy oddzielne przypadki, które wydzielić możemy zgodnie z rys. 5.1:

- napór na poziome ściany płaskie
- napór na ściany płaskie zorientowane dowolnie, przy czym przypadkiem szczególnym może być napór na pokazaną na rys. 5.1 płaską ścianę pionową
- napór na ściany zakrzywione przestrzennie, którego szczególnym przypadkiem może być ściana z krzywizną w jednej tylko płaszczyźnie (patrz rys. 5.1).

Wyprowadzone w ten sposób zależności pozwolą na obliczenie naporów na ściany o dowolnym kształcie, w których zawsze wydzielić będziemy mogli jeden lub więcej powyższych przypadków.

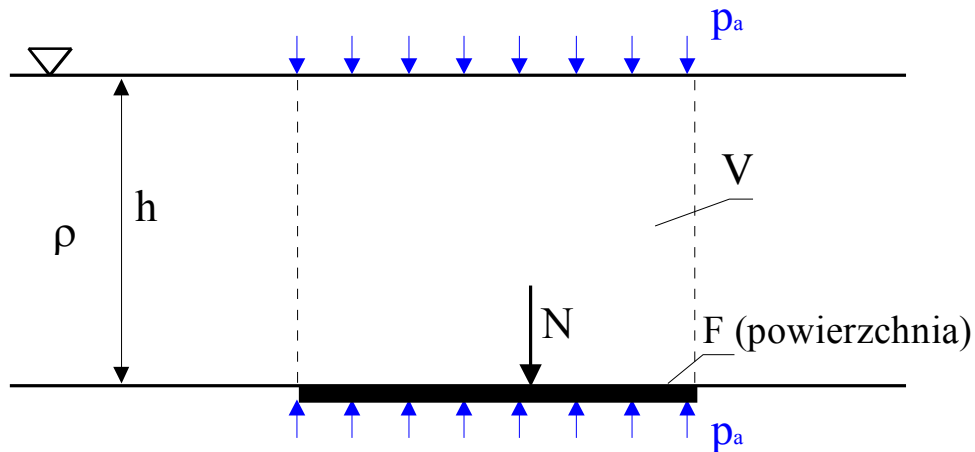
5.1. Napór cieczy na powierzchnie płaskie poziome

Przypadek ten jest z pewnością najprostszy, gdyż rozpatrywana powierzchnia F pokazana na rys. 5.2 leży na powierzchni ekwipotencjalnej, co oznacza z kolei, że na całej powierzchni mamy tę samą wartość ciśnienia hydrostatycznego. Napór hydrostatyczny

wywierany na powierzchnię płaską F przez warstwę cieczy o gęstości ρ i wysokości h będzie zgodnie z rys. 5.2 równy sile wypadkowej:

$$N = \rho \cdot g \cdot h \cdot F \quad (5.1)$$

Oznacza to, że *napór cieczy na płaskie, poziome dno zbiornika jest równy iloczynowi ciśnienia hydrostatycznego i pola powierzchni*, przy czym wypadkowa siła N tego naporu jest oczywiście przyłożona w środku geometrycznym (środku ciężkości) powierzchni F i



skierowana pionowo w dół.

Rys.5.2. Napór cieczy na płaską poziomą powierzchnię.

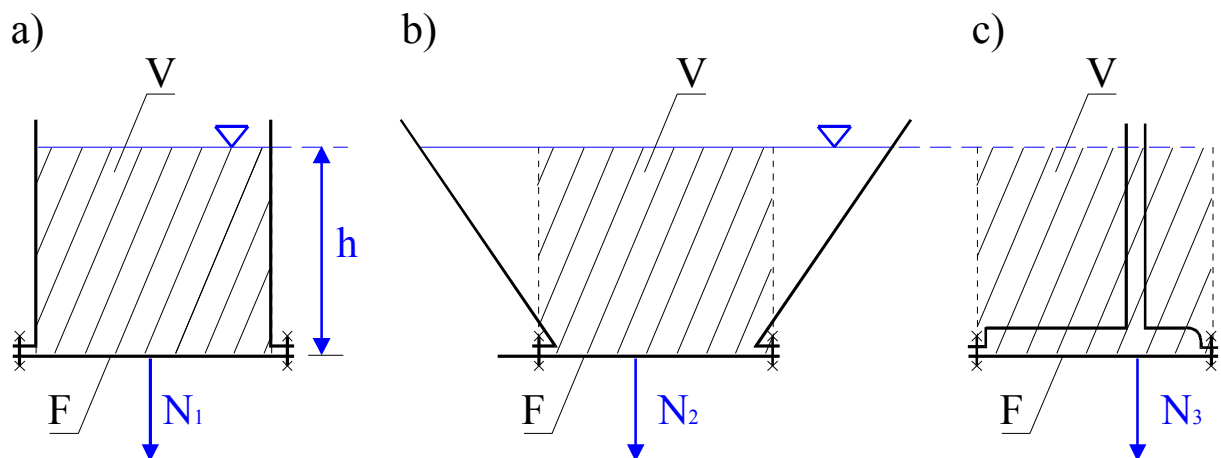
W zależności 5.1 występuje iloczyn

$$V = F \cdot h$$

będący objętością słupa cieczy o polu podstawy równym powierzchni dna i wysokości równej głębokości zanurzenia powierzchni, co pozwala przekształcić wz. (5.1) do postaci:

$$N = \rho \cdot g \cdot V \quad (5.2)$$

która opisuje napór jako ciężar objętości V cieczy znajdującej się nad rozpatrywaną powierzchnią. Błędem byłoby jednak utożsamienie naporu N z ciężarem cieczy znajdującej się w naczyniu, o czym przekonać może rys. 5.3 przedstawiający trzy różne zbiorniki o tym samym polu powierzchni dna i napełnione cieczą o gęstości ρ do tej samej wysokości h .



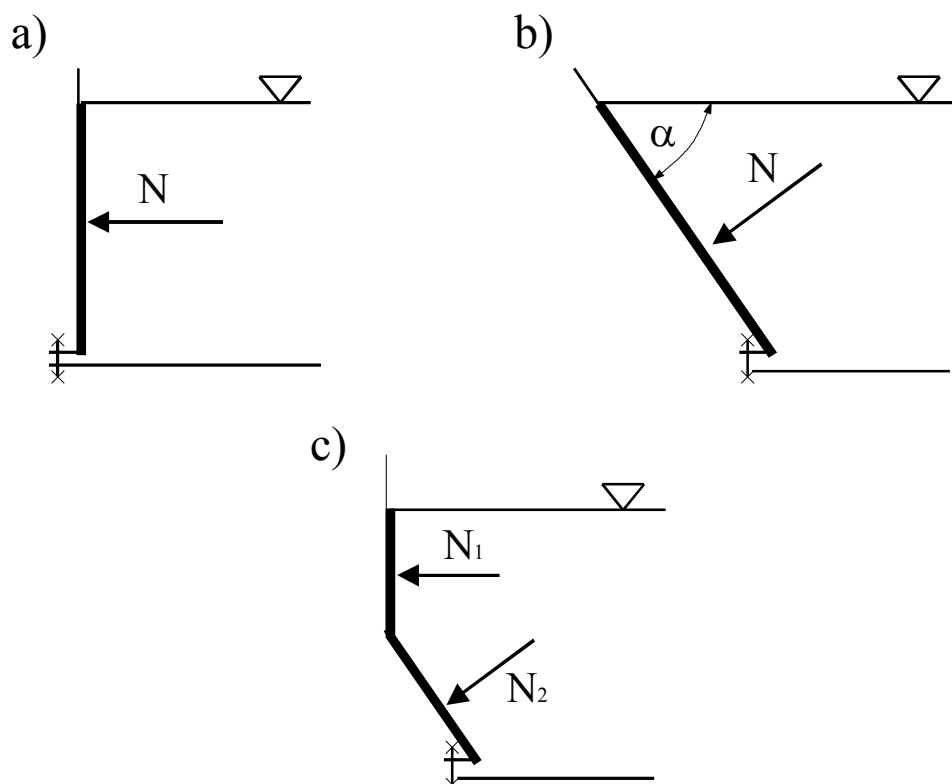
Rys.5.3. Paradoks Stevina dotyczący naporu na dno zbiornika.

Mimo, iż w każdym ze zbiorników mieszczą się różne objętości cieczy, to napór na dno jest w każdym przypadku jednakowy, tzn.:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \rho \cdot g \cdot h \cdot F$$

Związek ten ilustruje *paradoks Stevina o niezależności siły naporu na dno naczynia od ilości cieczy zawartej w zbiorniku*. Zależność (5.2) będzie natomiast poprawnie określać wielkość siły naporu na dno, jeżeli przez V rozumieć będziemy *objętość pozorną cieczy zawartej nad dnem* określoną jako objętość słupa cieczy o polu podstawy równym powierzchni dna i wysokości równej wysokości napełnienia zbiornika. Objętości pozorne cieczy zaznaczono na rys. 5.3 przez ich zakreskowanie, przy czym zauważyć można, że na rys. 5.3a objętość pozorna jest równa, na rys. 5.3b mniejsza a na rys. 5.3c większa od rzeczywistej objętości cieczy zawartej w zbiorniku. Oprócz zatem definicji zapisanej wz. (5.1) można również wielkość naporu N wyrazić jako ciężar pozornej objętości cieczy zawartej nad dnem, co zapisano jako wz. (5.2).

5.2. Napór cieczy na powierzchnie płaskie dowolnie zorientowane



Rys.5.4. Przykłady prostych i złożonych geometrii płaskich ścian zbiorników.

Zagadnienie określenia naporu na płaską pionową ścianę przedstawione na rys. 5.4a, jest szczególnym przypadkiem konfiguracji geometrycznej przedstawionej na rys. 5.4b, w której niewiadomymi są wielkość i miejsce przyłożenia naporu na ścianę płaską dowolnie zorientowaną. Jeżeli kąt α określający na rys. 5.4b orientację płaskiej ściany oraz kształt i powierzchnię ściany potraktujemy jako wielkości zmienne, wówczas uzyskane rozwiązanie będzie mogło być zastosowane do opisu naporów działających zarówno na pojedyncze ściany płaskie jak i układy takich ścian, czego przykład pokazano na rys. 5.4c.

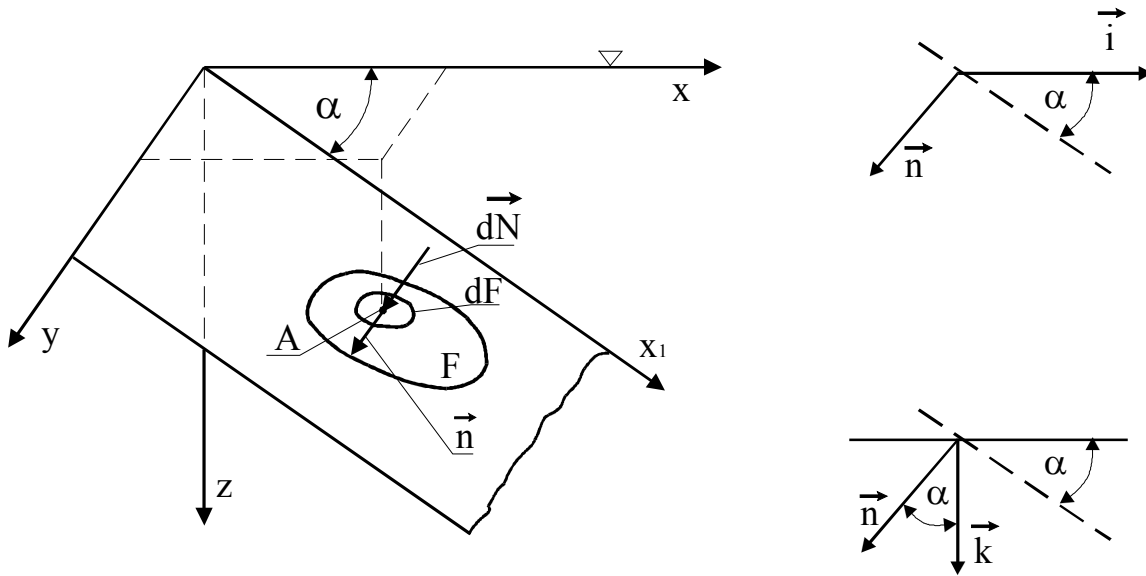
Dla opisu tego zagadnienia rozważmy powierzchnię F pokazaną na rys. 5.5, gdzie kartezjański układ współrzędnych x, y, z został wybrany w taki sposób, że płaszczyzna xy pokrywa się ze swobodną powierzchnią cieczy a oś z skierowana jest zgodnie z kierunkiem

działania sił ciężkości. Powierzchnia F leży w płaszczyźnie x_1y tworzącej z płaszczyzną xy kąt α . Na powierzchni F wybieramy małe otoczenie dF dowolnie położonego punktu A , którego głębokość zanurzenia wynosi Z . Elementarny napór działający na otoczenie punktu A wynosi:

$$d\vec{N} = \vec{n} \cdot p \cdot dF$$

gdzie \vec{n} jest wektorem powierzchni dF natomiast p jest ciśnieniem hydrostatycznym w punkcie A , co pozwala zapisać:

$$d\vec{N} = \vec{n} \cdot \rho \cdot g \cdot z \cdot dF \quad (5.4)$$



Rys.5.5. Sposób wyznaczania naporu hydrostatycznego na ścianę płaską dowolnie zorientowaną.

Wszystkie napory elementarne działające na otoczenie punktów składające na powierzchnię F są równoległe do siebie i skierowane w tę samą stronę, co pozwala zapisać napór całkowity na powierzchnię F jako wypadkową będącą sumą wektorów równoległych, tzn.:

$$\vec{N} = \int_F \vec{n} \cdot \rho \cdot g \cdot z \cdot dF$$

lub po przekształceniach:

$$\vec{N} = \rho \cdot g \cdot \vec{n} \int_F z dF \quad (5.4)$$

Moduł wypadkowego naporu hydrostatycznego wynosi:

$$\left| \vec{N} \right| = N = \rho \cdot g \int_F z dF \quad (5.4a)$$

a jego składowe na poszczególne osie współrzędnych są równe:

$$N_x = \rho \cdot g \int_F z \cos \left(\vec{n}; \vec{i} \right) dF$$

$$N_y = \rho \cdot g \int_F z \cos \left(\vec{n}; \vec{j} \right) dF \quad (5.5)$$

$$N_z = \rho \cdot g \int_F z \cos \left(\vec{n}; \vec{k} \right) dF$$

Wzajemne relacje między poszczególnymi kierunkami pokazane na rys. 5.5 pozwalają zapisać:

$$\cos \left(\vec{n}; \vec{i} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\cos \left(\vec{n}; \vec{j} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \left(\vec{n}; \vec{k} \right) = \cos \alpha$$

co po podstawieniu do wz. (5.5) daje:

$$N_x = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_F z dF$$

$$N_y = 0$$

$$N_z = \rho \cdot g \cdot \cos \alpha \int_F z dF$$

Wyrażenie:

$$\int_F z dF$$

jest momentem statycznym pola F względem płaszczyzny xy (zwierciadła cieczy) i może być zapisane jako:

$$\int_F z dF = z_c \cdot F$$

gdzie z_c jest odległością środka geometrycznego (środką ciężkości) pola F od zwierciadła cieczy, czyli głębokością zanurzenia środka ciężkości pola F . Podstawienie tej zależności do wzorów określających składowe siły naporu pozwala zapisać:

$$N_x = -\rho \cdot g \cdot z_c \cdot F \cdot \sin \alpha$$

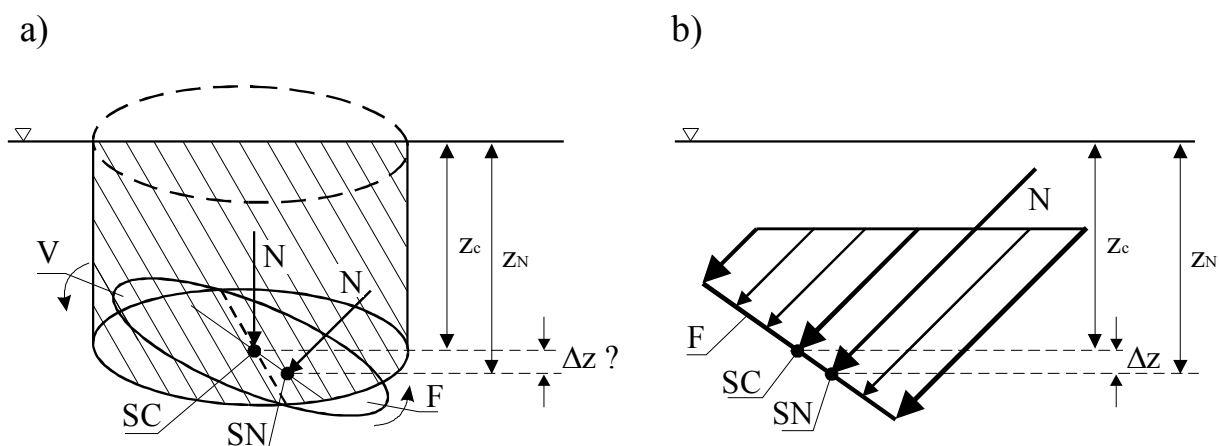
$$N_y = 0$$

$$N_z = \rho \cdot g \cdot z_c \cdot F \cdot \cos \alpha$$

co daje następujące wyrażenie na całkowitą siłę naporu:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = \rho \cdot g \cdot z_c \cdot F \quad (5.6)$$

Oznacza to, że *napór hydrostatyczny na dowolnie zorientowaną powierzchnię płaską jest iloczynem ciśnienia hydrostatycznego panującego w środku ciężkości i pola rozpatrywanej powierzchni.*



Rys.5.6. Wypadkowy napór hydrostatyczny na powierzchnię płaską a) i punkt jej przyłożenia b).

Jeżeli wyobrazimy sobie, że powierzchnia F jest podparta punktowo w środku ciężkości, wówczas niezależnie od ustawienia powierzchni wielkość siły naporu będzie niezmienna, bo przecież niezmiennie będzie ciśnienie hydrostatyczne w środku ciężkości (punkt podparcia) i pole powierzchni. W skrajnym przypadku, gdy ustawimy powierzchnię F poziomo (patrz rys. 5.6a) wówczas otrzymamy wyrażenie identyczne ze wz. (5.2) bo przecież dla powierzchni poziomej zapisać można:

$$z_c \cdot F = V$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie powyższej relacji do (5.6).

Gdy rozpatrywaliśmy napory na powierzchni płaskie poziome, wówczas punktem przyłożenia siły wypadkowej był oczywiście środek ciężkości SC zaznaczony na rys. 5.6a. Dla powierzchni płaskiej nachylonej, wielkość siły naporu liczymy identycznie jak dla powierzchni poziomej, tzn. jako iloczyn pola powierzchni i ciśnienia hydrostatycznego w środku ciężkości powierzchni. Dla powierzchni płaskiej dowolnie zorientowanej zależność (5.6) określająca siłę naporu daje nam wielkość siły wypadkowej jako sumę elementarnych naporów pokazanych na rys. 5.6b, ale z rysunku tego widać, że punkt przyłożenia tej siły musi leżeć na głębokości z_N większej niż wynosi zanurzenie środka ciężkości, tzn.

$$z_N > z_c$$

Jeżeli zatem dla wyznaczania naporu potrzebna jest znajomość ciśnienia w środku ciężkości SC zanurzonego na głębokości z_c , to wypadkową siłę naporu należy przyłożyć w punkcie SN zwanym *środkiem naporu*, który zanurzony jest na głębokości z_N .

Współrzędne punktu SN wyznaczymy z warunku równowagi momentów w płaszczyźnie x_1y dla której zapisać można następujący związek między głębokością zanurzenia punktu z i współrzędną x_1 (patrz rys. 5.5):

$$z = x_1 \sin \alpha \quad (5.7)$$

Warunek równowagi momentów przyjmuje postać:

$$N \cdot x_{1N} = \int_F \rho \cdot g \cdot x_1 \cdot z \cdot dF$$

a po uwzględnieniu wz. (5.4a) i (5.7):

$$x_{1N} \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_F x_1 dF = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int_F x_1^2 dF$$

skąd ostatecznie otrzymujemy wyrażenie na odległość środka naporu SN od osi y :

$$x_{1N} = \frac{\int x_1^2 dF}{\int x_1 dF} \quad (5.8)$$

Mianownik tego ułamka jest statycznym momentem pola F względem osi y oznaczanym zazwyczaj M_y , który równy jest iloczynowi pola i odległości jego środka ciężkości od osi y, tzn.:

$$\int_F x_1 dF = M_y = F x_{1c}$$

Wyrażenie występujące w liczniku wz. (5.8) jest geometrycznym momentem bezwładności pola F względem osi y oznaczanym I_y , który zgodnie z twierdzeniem Steinera zapisać możemy:

$$\int_F x_1^2 dF = I_y = I_s + F \cdot x_{1c}^2$$

gdzie moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości I_s może być zapisany jako iloczyn powierzchni i kwadratu ramienia bezwładności i_s , tzn.:

$$I_y = F \cdot i_s^2 + F \cdot x_{1c}^2$$

Podstawienie wyrażeń określających geometryczny i statyczny moment pola F do wz. (5.8) pozwala zapisać odległość środka naporu od osi y następująco:

$$x_{1N} = \frac{F \cdot i_s^2 + F \cdot x_{1c}^2}{F \cdot x_{1c}}$$

skąd po przekształceniach:

$$x_{1N} = x_{1c} + \frac{i_s^2}{x_{1c}} \quad (5.9)$$

Ponieważ drugi człon powyższego wyrażenia będący różnicą rzędnych punktów SN i SC jest zawsze dodatni, tzn.:

$$\frac{i_s^2}{x_{1c}} > 0$$

stąd też możemy stwierdzić, że punkt przyłożenia środka naporu jest zawsze położony w większej odległości od osi y niż środek ciężkości.

Znacznie łatwiejszym w interpretacji będzie przejście ze współrzędnej x_1 na współrzędną z określającą głębokość zanurzenia punktu naporu, którą obliczyć można jako:

$$z_N = x_{1N} \cdot \sin \alpha = x_{1c} \sin \alpha + \frac{i_s^2}{x_{1c}} \sin \alpha$$

a po przekształceniach:

$$z_N = z_c + \frac{i_s^2}{z_c} \sin \alpha \quad (5.10)$$

Otrzymujemy więc potwierdzenie, że w przypadku *ścian płaskich dowolnie zorientowanych* *środek naporu położony jest zawsze głębiej niż środek ciężkości rozpatrywanej ściany*. Nie dotyczy to jedynie ścian płaskich poziomych, dla których podstawienie $\alpha = 0$ do wz. (5.10) daje:

$$z_N = z_c$$

co stanowi potwierdzenie sformułowanego już wcześniej wniosku o tożsamości punktów ciężkości i naporu przy rozpatrywaniu naporów na płaskie, poziome dna. Największa różnica

głębokości zanurzenia z_N i z_c występuje dla ściany pionowej ($\alpha = \pi/2$), dla której otrzymujemy:

$$z_N = z_c + \frac{i_s^2}{z_c}$$

Warto również zauważyć, że chociaż zgodnie ze wz. (5.10) głębokość zanurzenia środka naporu jest funkcją kąta nachylenia ściany, to jak wynika ze wz. (5.9) punkt ten będzie pozostawał w stałej odległości od środka ciężkości. Jeżeli bowiem powierzchnię będziemy przechylać jak na rys. 5.6, tzn. jeżeli położenie środka ciężkości powierzchni F będziemy zmieniać jak na rys. 5.5, tzn. przez obrót wokół osi y nie przechodzącej przez środek ciężkości powierzchni F , wówczas zmieniać się będzie zarówno głębokość zanurzenia środka ciężkości SC jak i środka naporu SN , co łatwo można sprawdzić analizując wzory (5.9) i (5.10).

Należy jednak wprowadzić tu także bardzo ważne zastrzeżenie, iż wyprowadzone w niniejszym rozdziale zależności są ważne tylko dla powierzchni symetrycznych względem osi przechodzących przez środek ciężkości powierzchni F i równoległych do osi x_1 , gdyż tylko w tym przypadku punkty SC i SN będą miały identyczną współrzędną y (patrz rys. 5.5). Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, wówczas należy dodatkowo uwzględnić warunek zerowości momentów względem osi x_1 , a zagadnienie to znaleźć można m.in. w podręcznikach J. Wysockiego i J. Bukowskiego.

5.3. Napór cieczy na powierzchnie o dowolnym kształcie.

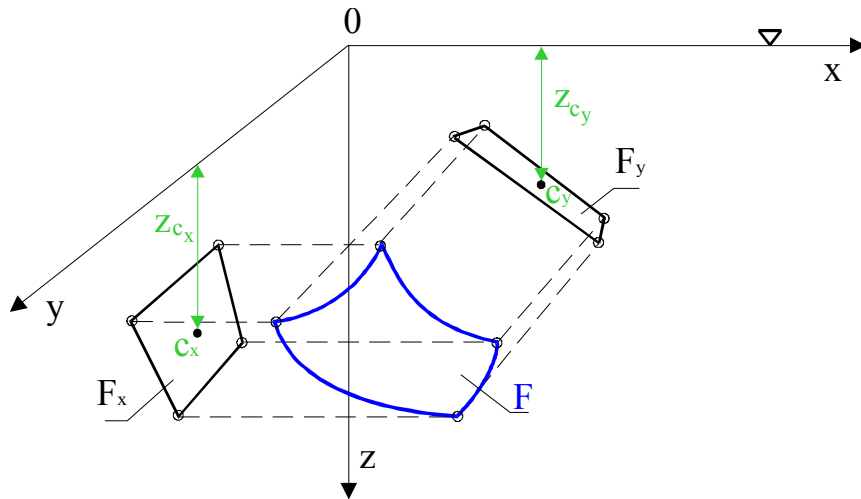
Najbardziej ogólnym przypadkiem w wyznaczaniu naporów hydrostatycznych jest obliczanie reakcji nieruchomego płynu na sztywną ścianę o trójwymiarowej krzywiznie, czego przykładem może być ściana o powierzchni F pokazana na rys. 5.7. Wszystkie siły elementarne działające na powierzchnię F tworzą przestrzenny układ sił, który można sprowadzić do jednej wypadkowej siły:

$$\vec{P} = \rho \cdot g \int_F \vec{n} \, z dF \quad (5.11)$$

oraz wypadkowego momentu sił nazywanego niekiedy momentem głównym:

$$\vec{M} = \rho \cdot g \cdot \int_F \left(\vec{r} \times \vec{n} \right) z dF \quad (5.12)$$

gdzie \vec{r} jest promieniem wyznaczającym położenie punktu, którego otoczeniem jest elementarna powierzchnia dF . Rozwiązanie tego zagadnienia można również uzyskać znacznie prościej zastępując przestrzenny układ sił trzema odpowiednio rozmieszczonymi składowymi siłami wypadkowej, których kierunki pokrywają się oczywiście z osiami przyjętego układu współrzędnych.



Rys.5.7. Składowe poziome naporu hydrostatycznego na ścianę o trójwymiarowej krzywiznie.

Założmy, że na krzywoliniowej powierzchni F pokazanej na rys. 5.7 wybierzemy elementarną powierzchnię dF , na którą działa napór:

$$d\vec{N} = \rho \cdot g \cdot z \cdot \vec{n} \cdot dF$$

który na kierunki x oraz y będzie miał następujące składowe:

$$d\vec{N}_x = \rho \cdot g \cdot z \cdot \cos\left(\vec{n}; \vec{i}\right) dF$$

$$d\vec{N}_y = \rho \cdot g \cdot z \cdot \cos\left(\vec{n}; \vec{j}\right) dF$$

Uwzględniając, że:

$$dF_x = dF \cos\left(\vec{n}; \vec{i}\right)$$

$$dF_y = dF \cos\left(\vec{n}; \vec{j}\right)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia na składowe poziome naporu:

$$dN_x = \rho \cdot g \cdot z \cdot dF_x$$

$$dN_y = \rho \cdot g \cdot z \cdot dF_y$$

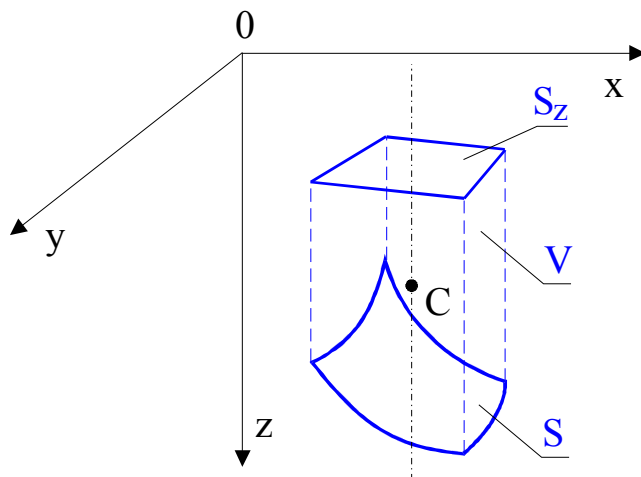
Całkując powyższe wyrażenia na całej powierzchni F można udowodnić, że składowa na dany kierunek poziomy naporu na rozpatrywaną powierzchnię będzie równa naporowi na ścianę płaską, której pole jest równe rzutowi powierzchni krzywoliniowej na płaszczyznę prostopadłą do danego kierunku. Jeżeli zatem rzutami powierzchni krzywoliniowej o polu S na płaszczyzny y, z oraz x, z będą figury płaskie o polach F_x i F_y (patrz rys. 5.7), wówczas zgodnie ze wzorem (5.6) składowe poziome sił naporu będziemy mogli obliczyć następująco:

$$\begin{aligned} dN_x &= \rho \cdot g \cdot z_{cx} \cdot dF_x \\ dN_y &= \rho \cdot g \cdot z_{cy} \cdot dF_y \end{aligned} \quad (5.13)$$

gdzie z_{cx} oraz z_{cy} oznaczają głębokości zanurzenia środków ciężkości rzutów powierzchni F_x oraz F_y . Uwzględniając wnioski z rozdz. 5.3 można stwierdzić, że linie działania tych sił

przechodzić będą przez środki naporu powierzchni F_x oraz F_y , których głębokość zanurzenia będzie można obliczyć przyjmując, że dla ścian pionowych $\alpha = \pi/2$, co daje:

$$\begin{aligned} z_{N_x} &= z_{cx} + \frac{i_{sx}^2}{z_{cx}} \\ z_{N_y} &= z_{cy} + \frac{i_{cy}^2}{z_{cy}} \end{aligned} \quad (5.14)$$



Rys.5.8. Składowa pionowa naporu hydrostatycznego na ścianę o trójwymiarowej krzywiznie.

Inna zasada obowiązywać będzie przy wyznaczaniu *składowej pionowej naporu*, która równa jest ciężarowi słupa cieczy zawartego nad powierzchnią S , przy czym objętość tego słupa cieczy zgodnie z rys. 5.8 ograniczona jest powierzchnią S , jej rzutem S_z na powierzchnię swobodną oraz tworzącymi pionowymi przechodzącymi przez kontur ograniczający powierzchnię S , co pozwala zapisać:

$$N_z = \rho \cdot g \cdot V \quad (5.15)$$

Ponieważ wszystkie elementarne napory pionowe dN_z są do siebie równoległe, więc *linia działania składowej N_z naporu przechodzi przez środek ciężkości C rozpatrywanego słupa cieczy*, jak zaznaczono na rys. 5.8.

Należy zauważyć, że pole powierzchni F_x, F_y, F_z a co z tego wynika także i wielkości składowych naporu N_x, N_y, N_z , nie zależą od kształtu powierzchni S lecz od konturu obejmującego daną ścianę S i od jej położenia pod swobodną powierzchnią cieczy.

6. Opis ruchu płynu idealnego i wybrane zastosowania

Jak wykazano w rozdz. 3, rozwiązanie równań opisujących ruch płynu jest w ogólnym przypadku niemożliwe, przy czym dotyczy to zarówno równań Navier-Stokesa opisujących ruch płynu rzeczywistego (lepkiego) jak i równań Eulera opisujących ruch płynu idealnego. Dla równań N-S udało się znaleźć kilka rozwiązań szczególnych (patrz rozdz. 3.6), jednak dotyczą one wyłącznie jedno lub dwuwymiarowych przepływów laminarnych, których zakres zastosowań praktycznych jest dość ograniczony. Również i dla równania Eulera istnieje kilka rozwiązań szczególnych, przy czym jedno z nich ma tak szeroki zakres stosowalności, że konieczne jest poświęcenie mu odrębnego rozdziału.

6.1. Równanie Bernoulliego dla ruchu ustalonego płynu idealnego wzdłuż linii prądu.

Poszukiwać będziemy rozwiązania równania ruchu płynu idealnego odbywającego się w polu sił ciężkości, w którym pole jednostkowych sił masowych \vec{F} ma potencjał U , tzn.:

$$\vec{F} = -\text{grad } U \quad (4.11a)$$

Dodatkowo będziemy poszukiwać rozwiązania dla przepływu ustalonego, w którym parametry nie zmieniają się z czasem, co pozwala w równ. (3.6) pominąć pochodne lokalne:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{\partial U_z}{\partial t} = 0$$

i zapisać je w postaci:

$$\begin{aligned} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Poszukiwane rozwiązanie ma opisywać zmiany energii zachodzące w przepływie wzdłuż linii prądu, co wymaga przekształcenia powyższego równania poprzez pomnożenie kolejnych równań przez odpowiednie przesunięcia elementarne dx , dy , dz . Jeżeli równanie Eulera jest bilansem równowagi sił, to pomnożenie go przez elementarne przesunięcia da elementarną pracę równoważną energii. Jednocześnie energia jako wielkość skalarna podlega zwykłemu (tzn. algebraicznemu a nie wektorowemu) sumowaniu, co pozwala zapisać powyższe równania w postaci:

$$\begin{aligned} &\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) dx + \\ &+ \left(U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) dy + \\ &+ \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) dz = \\ &= Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Przekształcając równ. (4.11a) otrzymujemy:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -dU_p$$

gdzie potencjał U_p w polu sił ciężkości wynosi:

$$U_p = g \cdot z$$

Drugie z wyrażeń po prawej stronie równ. (6.1) jest również różniczką zupełną:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dp}{\rho}$$

co nakazuje przekształcić także i lewą stronę zw. (6.1) do różniczki zupełnej, gdyż w tym przypadku możliwe będzie rozwiązanie (scałkowanie) tego równania. Wykorzystamy w tym celu sformułowane wcześniej założenie, że rozpatrywany ruch jest ustalony co sprawia, że równania trajektorii i linii prądu stają się tożsame i przyjmują postać:

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}$$

z której uzyskać możemy następujące związki:

$$U_y dx = U_x dy \quad (6.2a)$$

$$U_z dy = U_y dz \quad (6.2b)$$

$$U_z dx = U_x dz \quad (6.2c)$$

Jeżeli założymy, że rozpatrujemy ruch odbywający się tylko wzdłuż jednej linii prądu, wówczas pierwszy człon lewej strony równ. (6.1) przekształcić będziemy mogli następująco:

$$\begin{aligned} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} dx + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} dx &= \\ = U_x dx \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_x dy \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_x dz \frac{\partial U_x}{\partial z} &= U_x dU_x = d \left(\frac{U_x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Postępując analogicznie w odniesieniu do drugiego i trzeciego członu lewej strony równania (6.1) będziemy je mogli doprowadzić do postaci:

$$d \left(\frac{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}{2} \right) = -dU_p - \frac{1}{\rho} dp$$

co po uwzględnieniu wcześniej sformułowanych zależności na potencjał oraz następującego związku:

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2$$

prorowadzi do następującej zależności:

$$d \left(\frac{U^2}{2} \right) + dU_p + \frac{1}{\rho} dp = 0$$

Z powyższego równania otrzymać możemy *całkę* lub *równanie Bernoulliego*:

$$\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + g \cdot z = C = \text{const} \quad (6.3)$$

w którym stała C zachowuje stałą wartość wzdłuż danej linii prądu, przy czym jej wartość może być oczywiście różna dla innych linii prądu. Najprostszą postać równania Bernoulliego otrzymujemy dla jednorodnego płynu nieściśliwego, dla którego:

$$\rho = \text{idem}$$

co pozwala zapisać ostatecznie:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{const} \quad (6.4)$$

Łatwo stwierdzić, że powyższe równanie stanowi warunek zachowania energii przepływającego płynu odniesionej do jednostki masy, w którym człon pierwszy przedstawia energię kinetyczną, drugi energię potencjalną ciśnienia (energię wewnętrzną) natomiast człon trzeci energię potencjalną położenia (sił masowych). Równanie Bernoulliego stwierdza zatem, że *w ruchu ustalonym nieściśliwego płynu idealnego odbywającym się w polu sił ciężkości,*

całkowita energia płynu składająca się z energii kinetycznej oraz potencjalnej energii ciśnienia i położenia jest stała wzdłuż danej linii prądu. Równanie to wyraża zatem zasadę zachowania energii mechanicznej, przy czym często piszemy je w postaci:

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = \text{const} \quad (6.5)$$

w której wszystkie człony mają wymiar liniowy i nazywane są wysokością prędkości (człon pierwszy), wysokością ciśnienia (człon drugi) i wysokością położenia (człon trzeci). Otrzymaliśmy zatem bardzo prostą metodę opisu ruchu płynu wykorzystującą zamiast układu równań różniczkowych równanie algebraiczne kwadratowe (ze względu na prędkość) i jest to oczywiście powodem, dla którego równanie Bernoulliego jest tak atrakcyjne. Należy jednak pamiętać, że jego stosowalność jest obwarowana szeregiem następujących warunków:

- ruch jest ustalony
- rozpatrujemy płyn idealny
- pole sił masowych jest potencjalne
- płyn jest nieściśliwy
- ruch odbywa się wzdłuż jednej linii prądu

co sprawia, że mimo atrakcyjności równania Bernoulliego wynikającej z prostoty, jego zakres jego możliwych aplikacji jest ograniczony.

6.2. Metodyka rozwiązywania równania Bernoulliego i jego interpretacja

W równaniu Bernoulliego występują dwie niewiadome, tzn. prędkość i ciśnienie, gdyż gęstość traktujemy jako znaną i niezmienną:

$$\rho = \text{idem} \quad (6.5)$$

co wynika z przyjęcia założenia o nieściśliwości płynu. Dla uzyskania rozwiązania koniecznym jest zatem dołożenie dodatkowych warunków (równań), którymi mogą być (patrz rozdz. 3.2) równanie ciągłości i równanie stanu. To ostatnie równanie już wykorzystaliśmy przyjmując założenie o nieściśliwości co pozwala nam traktować gęstość płynu jako znaną, gdyż dana jest równaniem (6.5). Pozostaje zatem do wykorzystania równanie ciągłości, a z uwagi na ograniczenie rozważań do linii prądu tożsamy w ruchu ustalonym z trajektoriami elementów płynu, wykorzystać możemy równanie ciągłości sformułowane w rozdz. 2.5 dla włókna prądu w postaci:

$$S \cdot U = Q = \text{idem} \quad (2.20)$$

gdzie S i U oznaczają odpowiednio pole przekroju włókna i prędkość średnią, natomiast Q jest wydatkiem płynu przepływającego przez rurkę prądu. Uwzględniając oznaczenia z rys. 2.6, dla kolejnych przekrojów włókna prądu zapisać można:

$$S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2 = \dots = Q = \text{idem} \quad (6.6)$$

a przyjmując, że równanie Bernoulliego ważne jest dla średniej linii prądu (np. przechodzącej przez środki geometryczne przekrojów) możemy je zapisać następująco:

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 = \dots = \text{const} \quad (6.7)$$

gdzie przyjęte oznaczenia wyjaśnione są na rys. 6.1.

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań (6.6) i (6.7), których rozwiązanie da nam opis przepływu, tzn. wartość prędkości średniej i ciśnienia panującego w każdym z rozpatrywanych przekrojów strugi.

W rozdziale poprzednim wykazaliśmy, że równanie Bernoulliego jest warunkiem zachowania energii mechanicznej a poszczególne człony tego równania odpowiadają różnym rodzajom energii potencjalnej i kinetycznej. W przepływie płynu idealnego interpretację równania Bernoulliego zilustrowano na rys. 6.1, umieszczając rurkę prądu o stałym przekroju w przestrzeni wypełnionej płynem. Własności rurki prądu omówione w rozdz. 2.4 pozwalają

ją traktować jak rzeczywisty kanał transportujący płyn. Jeżeli w przekrojach 1-1 oraz 2-2 umieścimy rurki manometryczne (nazywane często piezometrycznymi), wówczas poziomy cieczy w tych rurkach odpowiadać będą panującym tam ciśnieniom. Jeżeli przyjmiemy, że ciecz w rurce prądu jest nieruchoma, wówczas zgodnie z zasadą naczyń połączonych w obydwu rurkach manometrycznych wzniesie się ona do wysokości swobodnej powierzchni, a równanie Bernoulliego będzie miało postać:

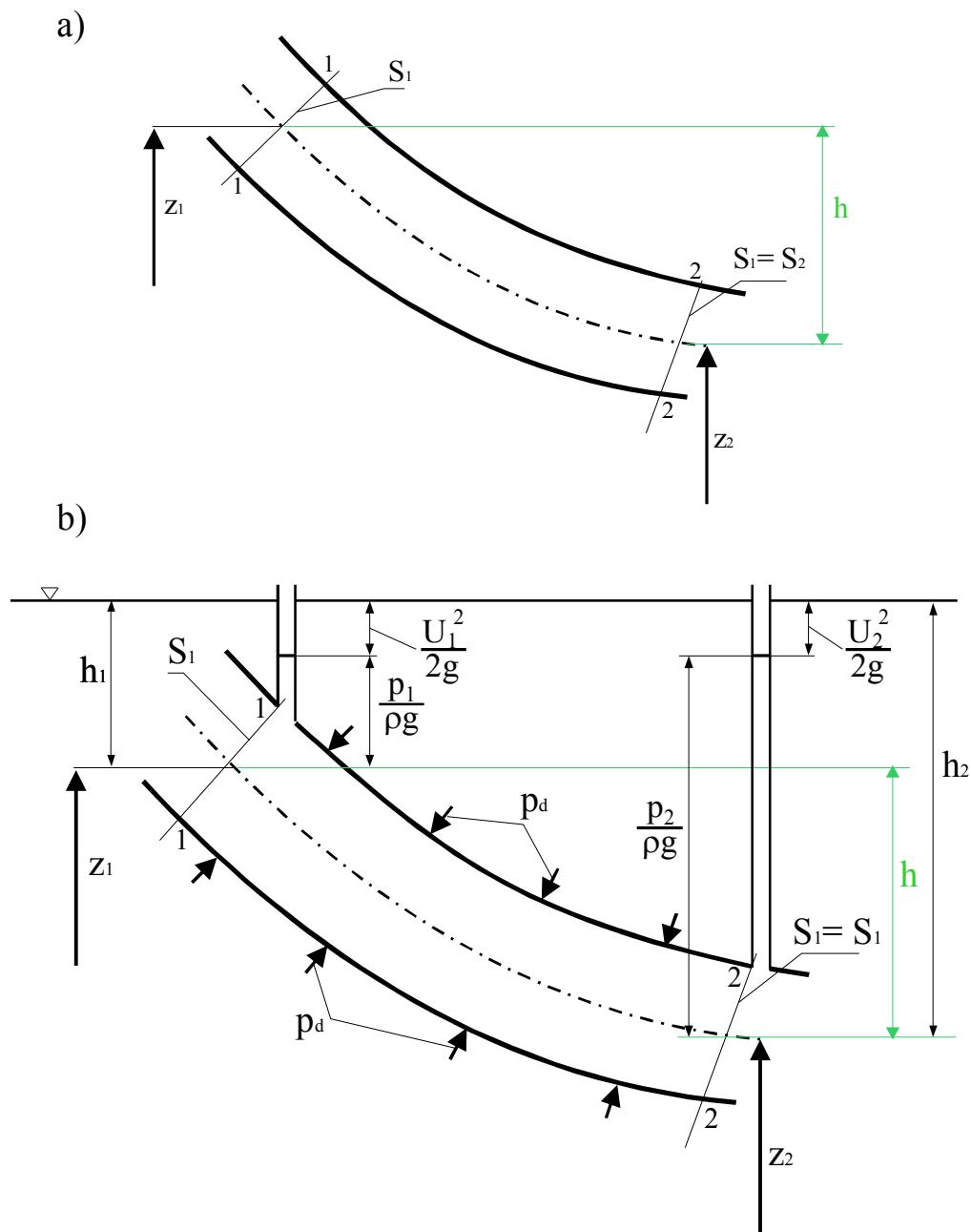
$$\frac{p_1'}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{p_2'}{\rho \cdot g} + z_2 \quad (6.8)$$

w której p_1' i p_2' będą odpowiednimi ciśnieniami hydrostatycznymi, tzn.:

$$p_1' = \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$p_2' = \rho \cdot g \cdot h_2$$

jak wynika to z rys. 6.1a.



Rys.6.1. Oznaczenia przyjęte w równaniu Bernoulliego dla strugi a) oraz interpretacja członów równania w przepływie b).

Jeżeli natomiast w rurce prądu płyn przemieszczać się będzie ze średnią prędkością U , wówczas część energii potencjalnej ciśnienia zamieni się w energię kinetyczną poruszającego się płynu co oznacza, że w obydwu rurekach manometrycznych poziom cieczy opadnie o:

$$\frac{U_1^2}{zg} = \frac{U_2^2}{zg} = \frac{U^2}{zg}$$

co pokazano na rys. 6.1b. Dla tego przypadku równanie Bernoulliego przyjmie postać:

$$\frac{U_1^2}{zg} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{zg} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad (6.9)$$

Ponieważ płyn opisany powyższym równaniem nie znajduje się w stanie równowagi statycznej, stąd też ciśnienia p_1 i p_2 nie są ciśnieniami hydrostatycznymi lecz *ciśnieniami statycznymi*, które odpowiadają oddziaływaniu sąsiednich, poruszających się elementów, zapewniającemu równowagę ruchomego płynu. Przy niezmiennym przekroju rurki i wynikającym stąd warunku:

$$U_1 = U_2 \quad (6.10)$$

ciśnienia statyczne będą mogły być obliczone jako ciśnienia hydrostatyczne, pomniejszone o tę samą dla obydwu przekrojów poprawkę ciśnienia wynikającą z prędkości przepływu. Ciśnienia statyczne będą zatem zawierać pewną nadwyżkę ponad ciśnieniami hydrostatycznymi wynikającymi z wysokości położenia środków przekrojów 1-1 i 2-2, co łatwo można wykazać podstawiając (6.10) do równ. (6.9) co po elementarnych przekształceniach daje:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Różnica ciśnień statycznych w przewodzie o stałym przekroju będzie zatem wynosić:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g (z_1 - z_2) = \rho \cdot g \cdot h$$

co oznacza, że jest ona równa ciśnieniu hydrostatycznemu słupa cieczy o wysokości równej różnicy wysokości niwelacyjnych przekrojów 1-1 i 2-2.

Wyjaśnijmy jeszcze różnicę między ciśnieniem statycznym p opisanym wz. (6.9) i hydrostatycznym p' występującym w równ. (6.8), które to równania przepisać możemy do postaci:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = C_1$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{U_1^2}{zg} + z_1 = C_2$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi, odpowiadającymi całkowitej energii mechanicznej w punkcie linii prądu leżącym w środku przekroju 1-1. Ponieważ rozważamy płyn idealny, dla którego w trakcie przepływu nie powstają żadne straty, stąd energia mechaniczna w stanie spoczynku i ruchu są identyczne, co oznacza:

$$C_1 = C_2$$

Pisząc analogiczne równania dla przekroju 2-2, a następnie odejmując odpowiednie pary równań stronami, otrzymujemy do uwzględnienia wz. (6.10):

$$p_d = p'_1 - p_1 = p'_2 - p_2 = \frac{\rho U^2}{2} \quad (6.11)$$

Wielkość występująca po prawej stronie nazywana jest *ciśnieniem dynamicznym*.

Z równ. (6.11) wynika zatem, że *ciśnienie dynamiczne jest różnicą między ciśnieniami płynu pozostającego w spoczynku i poruszającego się*. Ciśnienie statyczne w rurce prądu będzie niższe niż ciśnienie hydrostatyczne w płynie nieruchomym, ponieważ część energii potencjalnej ciśnienia została zamieniona na energię kinetyczną poruszającego się płynu.

Wobec tego nieruchomy płyn otaczający rurkę prądu wywiera na nią ciśnienie p_d , co pokazano na rys. 6.1b.

Równanie Bernoulliego (które przypomnijmy jest równaniem zachowania energii) przekształcić możemy do postaci:

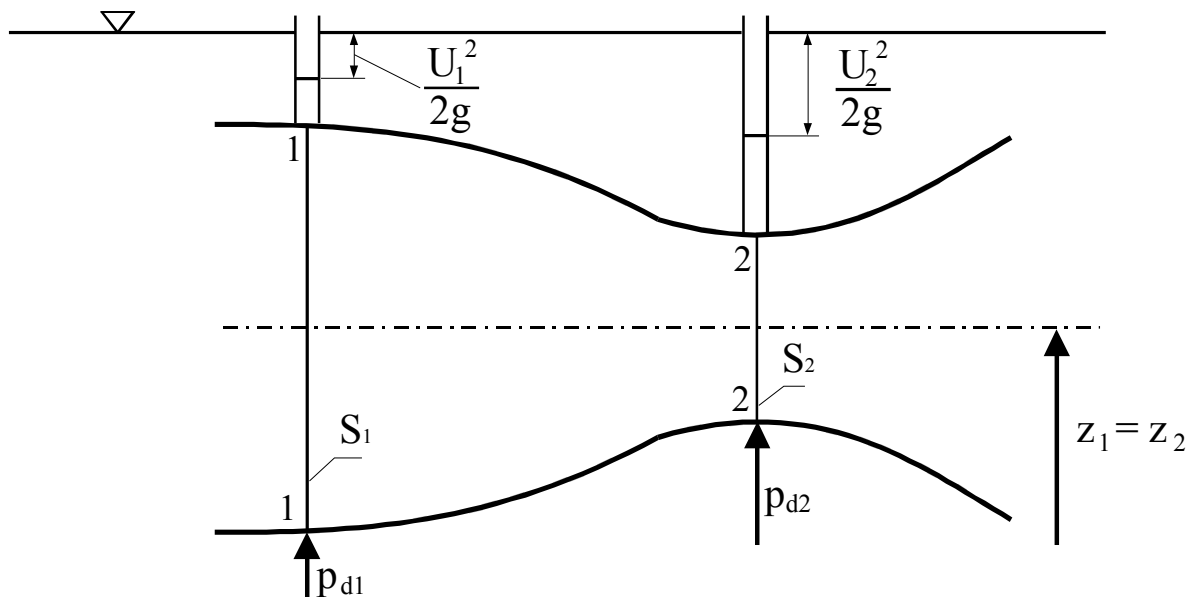
$$\frac{\rho U^2}{2} + p + \rho \cdot g \cdot z = p_c = \text{const} \quad (6.12)$$

zawierającej kolejno ciśnienie dynamiczne, statyczne i hydrostatyczne, których suma ma pozostawać niezmienna wzdłuż linii prądu. Suma ta nazywana jest ciśnieniem całkowitym p_c , a wprowadzenie tego pojęcia pozwala wyrazić równanie Bernoulliego dla płynów idealnych jako warunek stałości ciśnienia całkowitego wzdłuż linii prądu (patrz zał. 6.12).

Dla gazów równanie Bernoulliego bywa często zapisywane w postaci:

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} = \text{const} \quad (6.13)$$

gdyż wobec małej gęstości gazów człon ciśnienia hydrostatycznego (patrz wz. (6.12)) może zostać pominięty. Równanie (6.13) nazywane jest równaniem Bernoulliego dla gazów i zachowuje ono ważność dla przepływów gazu przy umiarkowanych prędkościach tzn. takich, przy których nie zauważa się jeszcze efektów ścisłości.



Rys.6.2. Interpretacja równania Bernoulliego dla przepływu przez kanał poziomy o zmiennym przekroju.

Identyczną jak we wz. (6.13) postać przybiera równanie Bernoulliego dla przepływu cieczy przez kanał poziomy, pokazany na rys. 6.2, dla którego możemy zapisać:

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g}$$

gdyż wobec jednakowej wysokości niwelacyjnej środków obydwu przekrojów:

$$z_1 = z_2$$

upraszczają się człony ciśnienia hydrostatycznego.

Z równania ciągłości:

$$S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2$$

wynika związek między prędkościami średnimi w obydwu przekrojach:

$$U_2 > U_1$$

prowadzący z kolei do zależności między ciśnieniami dynamicznymi:

$$p_{d2} = \frac{\rho U_2^2}{z} > p_{d1} = \frac{\rho U_1^2}{z}$$

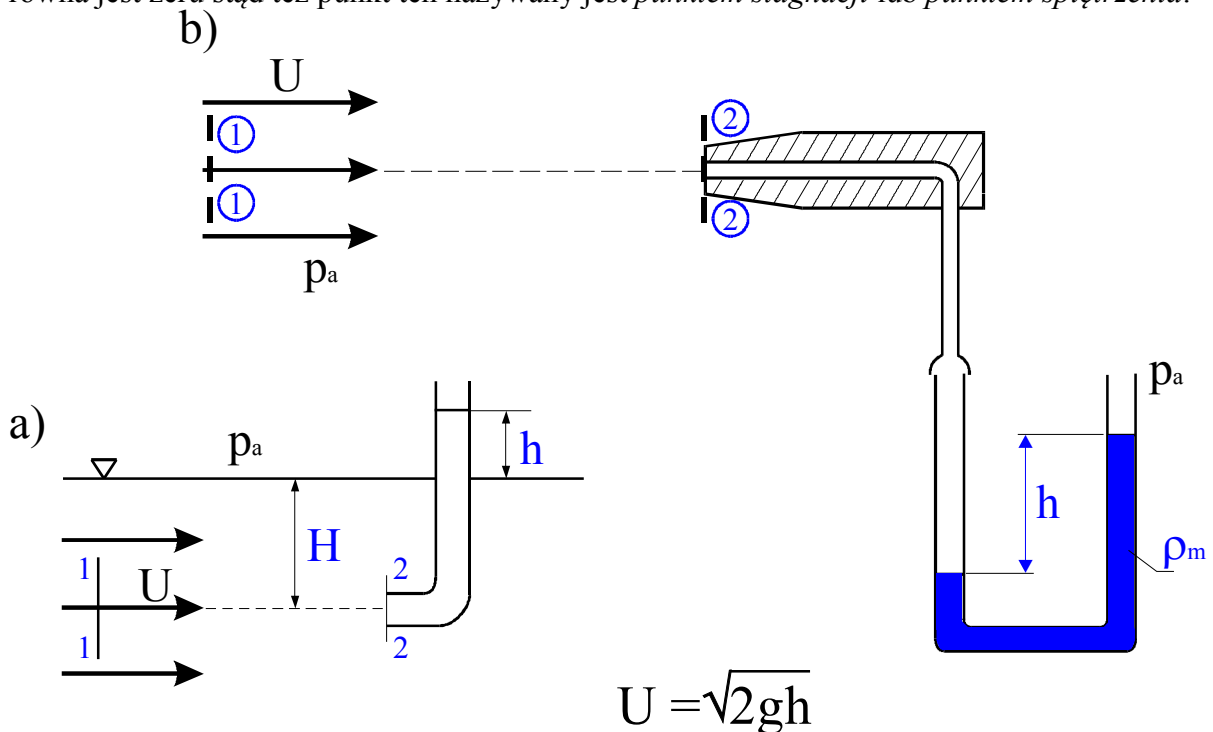
Jak pokazano na rys. 6.2 ciśnienie statyczne p_2 w przekroju 2–2 jest mniejsze niż p_1 , co oznacza, iż nieruchomy płyn otaczający rurkę prądu wywiera na nią ciśnienie p_d tym większe, im mniejszy jest przekrój poprzeczny przepływu. Ta własność przepływu znajduje liczne zastosowania praktyczne m.in. w rozpylaczach cieczy, w których ciecz doprowadzona do najwęższego przekroju kanału zostaje zassana i podlega intensywnemu rozdrabnianiu.

6.3. Pomiar prędkości przepływu – sondy ciśnieniowe.

Pomiar prędkości poruszającego się płynu był do XVIII wieku zagadnieniem nierozwiązanym. Prędkość wody przepływającej w otwartych kanałach można było zmierzyć określając czas przebycia odcinka o znanej długości przez ciało unoszone w wodzie. Jednak po pierwsze, możliwy był w ten sposób pomiar prędkości tylko w warstwie powierzchniowej, po drugie nie można było w ten sposób zmierzyć prędkości przepływu przez zamknięte kanały (rurociągi). Rozwiązanie problemu znalazł w roku 1732 francuski matematyk Henri de Pitot, który zauważył, że wstawienie do przepływu otwartej rurki skierowanej przeciwnie do napływającej cieczy powoduje, że poziom cieczy wznosi się w niej ponad swobodną powierzchnię (patrz rys. 6.3a) a wysokość tego „spiętrzenia” h jest zależna od prędkości przepływu. Pitot ułożył równanie Bernoulliego dla linii prądu przechodzącej przez oś rurki (nazywanej często *rurką Pitot’a* lub *rurką spiętrzającą*) w dwóch przekrojach kontrolnych otrzymując:

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} \quad (6.14)$$

W równaniu tym U jest poszukiwaną prędkością, a ponieważ w przekroju 2–2 prędkość równa jest zero stąd też punkt ten nazywany jest *punktem stagnacji* lub *punktem spiętrzenia*.



Rys.6.3. Pomiar prędkości płynu przez pomiar ciśnienia całkowitego w punkcie stagnacji rurką spiętrzającą a) oraz sondą Pitot’a b).

Zakładając, że nad swobodną powierzchnią panuje ciśnienie atmosferyczne p_a , ciśnienia w odpowiednich przekrojach będą równe:

$$p_1 = p_a + \rho \cdot g \cdot H$$

$$p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot (H + h)$$

co po podstawieniu do równania Bernoulliego i elementarnych przekształceniach daje nam wyrażenie na poszukiwaną prędkość przepływu:

$$U = \sqrt{2gh} \quad (6.15)$$

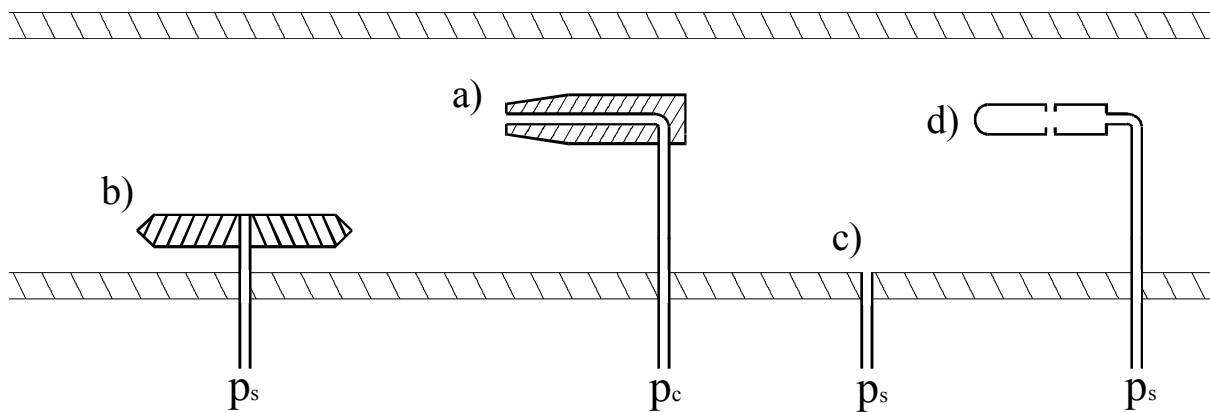
Warto zauważyć, że jest to znany wzór Torricelli'ego określający prędkość swobodnego spadku ciała w próżni, wyrażający wzajemną równowagę energii kinetycznej spadającego ciała i energii potencjalnej położenia (wysokości). W analizowanym przypadku jest to natomiast równowaga energii kinetycznej poruszającego się elementu płynu i potencjalnej energii ciśnienia słupa cieczy w rurce spiętrzanej do wysokości h ponad swobodną powierzchnię. Jeżeli przekształcimy równ. (6.14) do postaci:

$$\frac{\rho U^2}{2} + p_1 = p_2$$

i zauważymy, że pierwszy człon lewej strony równania jest ciśnieniem dynamicznym a drugi statycznym, wówczas ciśnienie p_2 będzie *ciśnieniem całkowitym* p_c , które nazywane jest również *ciśnieniem spiętrzenia*.

Wracając do definicji ciśnienia całkowitego z rozdziału poprzedniego łatwo wykazać, że wstawienie rurki spiętrzającej w środek każdego z przekrojów kontrolnych rurki prądu z rys. 6.1 dawać będzie ciśnienie całkowite (ciśnienie spiętrzenia) takie, że ciecz będzie wznosić się do wysokości swobodnej powierzchni. W przepływie z rys. 6.11 obecność ścian powodowała bowiem, że ciśnienie statyczne w przepływie było niższe niż w płynie nieruchomym, podczas gdy w przepływie w kanale otwartym z rys. 6.3 ciśnienia statyczne w płynie nieruchomym i poruszającym się są identyczne.

Sposób pomiaru z rys. 6.3a nie jest zbyt wygodny w zastosowaniach praktycznych, gdyż przy bardzo małych prędkościach otrzymujemy niewielkie wysokości spiętrzenia.



Rys.6.4. Pomiar prędkości przepływu przy zastosowaniu sondy Pitot'a a) oraz płytki Cera b), otworu w ścianie c), oraz sondy ciśnienia statycznego d).

Wynik pomiaru jest wówczas obarczony dużym błędem, a ponadto sposób ten nie może być zastosowany do pomiaru prędkości w gazach. Dlatego też w praktyce stosuje się specjalne sondy Pitot'a, w których rurka spiętrzająca otoczona jest specjalną obudową zmniejszającą wrażliwość sondy na błędy jej ustawienia. Dodatkowo, impuls ciśnienia z punktu stagnacji doprowadzony jest do manometru cieczowego, w którym dzięki zastosowaniu cieczy manometrycznej o małej gęstości i odpowiedniemu pochyleniu rurki (dającej tzw.

przełożenie manometru i) zwiększyć możemy dokładność pomiaru. Dla sondy Pitot'a z rys. 6.3b, do równania Bernoulliego o postaci (6.14) podstawiamy:

$$p_1 = p_2$$

$$p_2 = p_c = p_a + \rho_m \cdot g \cdot h \cdot i$$

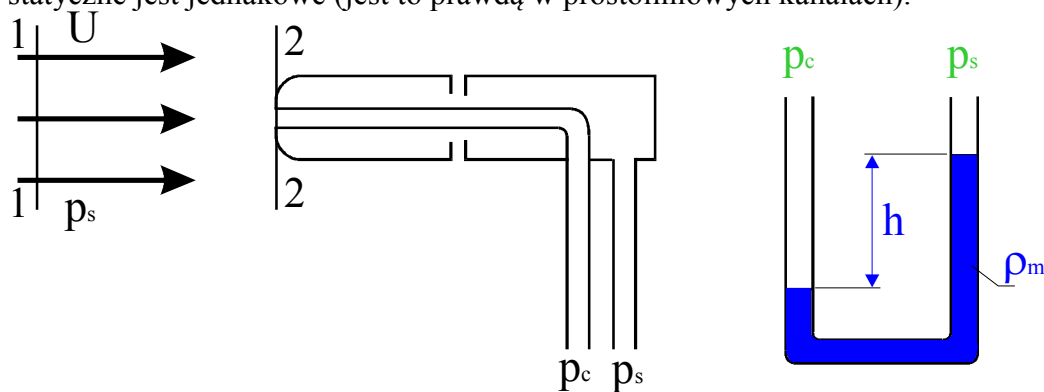
gdzie ρ_m jest gęstością cieczy manometrycznej, i - przełożeniem manometru, a h różnicą wysokości słupów cieczy w manometrze. Po uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie następującą zależność na poszukiwaną prędkość przepływu:

$$U = \sqrt{2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \cdot g \cdot h \cdot i} \quad (6.16)$$

a porównanie ze wz. (6.15) wskazuje, że różnica wysokości h wskazywana przez manometr, będzie większa tyle razy, ile wynosi wartość ilorazu:

$$\left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \cdot i$$

W przykładzie z rys. 6.1b ciśnienie statyczne w przepływie było równe ciśnieniu atmosferycznemu i dlatego oprócz ciśnienia całkowitego do drugiej gałęzi manometru podawano ciśnienie p_a . Jeżeli ciśnienie statyczne w przepływie będzie różne od ciśnienia otoczenia (np. w przepływie w rurociągu – rys. 6.4) wówczas oprócz ciśnienia całkowitego mierzonego sondą Pitot'a (rys. 6.4a) koniecznym będzie określenie wartości ciśnienia statycznego p_s . Ciśnienie statyczne zgodnie z definicją z rozdz. 6.2 jest ciśnieniem z jakim oddziałuje na poruszający się element płynu płyn otaczający co oznacza, że winno być ono mierzone w sposób nie zniekształcający linii prądu. Na rys. 6.4 pokazano przykłady przyrządów stosowanych w tym celu m.in. płytki ustawionej równolegle do linii prądu, nazwanej od imienia hiszpańskiego aerodynamika *plytką Cera* (rys. 6.4b). Na podobnej zasadzie opiera się pomiar z użyciem *sondy ciśnienia statycznego* (rys. 6.4b), w której walcowym płaszczu rozmieszczone są otworki w odległości na tyle dużej od noska sondy, aby uniknąć zakłóceń spowodowanych zakrzywieniem linii prądu. Bardzo często stosowanym sposobem pomiaru ciśnienia statycznego jest pobieranie impulsu ciśnienia z *otworu w ścianie*, przy czym konieczne jest tu założenie, że w danym przekroju poprzecznym kanału ciśnienie statyczne jest jednakowe (jest to prawdą w prostoliniowych kanałach).



Rys.6.5. Sonda Prandtla a) oraz sposób jej połączenia z manometrem b).

Bardzo wygodny sposób pomiaru prędkości zaproponował niemiecki aerodynamik L.Prandtl, proponując połączenie sondy Pitot'a z sondą ciśnienia statycznego, co pokazano na rys. 6.5a. W sondzie tej centralna rurka impulsowa mierzy ciśnienie całkowite p_c , natomiast rurka połączona z cylindrycznym płaszczem daje ciśnienie statyczne p_s . Równanie (6.14) przekształcamy do postaci:

$$\frac{\rho U^2}{2} = p_2 - p_1$$

a podstawiając:

$$p_1 = p_s$$

$$p_2 = p_c$$

otrzymujemy dzięki tzw. różnicowemu podłączeniu ciśnień (rys. 6.5b):

$$p_c - p_s = \rho_m \cdot g \cdot h$$

Ostatecznie prędkość przepływającego płynu obliczyć możemy z zależności:

$$U = \sqrt{2 \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \cdot g \cdot h}$$

która po uwzględnieniu przełożenia manometru przybiera postać identyczną jak wz. (6.16).

6.4. Wprowadzenie do gazodynamiki

Omówiony w rozdz. 6.1 sposób wyprowadzenia równania Bernoulliego oparty był na założeniu stałej gęstości płynu

$$\rho = \text{idem}$$

co oznacza, że wyprowadzone tam równanie o postaci:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{const} \quad (6.4)$$

jest ważne jedynie dla jednorodnego płynu nieściśliwego. Jest to słuszne dla cieczy których gęstość jest praktycznie stała dla znacznych nawet zmian ciśnienia. Dla gazów zmiana ciśnienia wywołana np. przyrostem lub spadkiem prędkości powodować będzie zmianę gęstości. Jeżeli równanie Bernoulliego ma opisywać zachowanie gazu, wówczas konieczne jest wprowadzenie dodatkowego równania wiążącego gęstość, ciśnienie i temperaturę czynnika, czyli równania stanu gazu. Dla typowych zastosowań technicznych zupełnie dobrym przybliżeniem jest przyjęcie *modelu gazu doskonałego*, dla którego równanie stanu zapisać można jako:

$$\frac{p}{\rho \cdot T} = R \quad (6.18)$$

Występująca w powyższym równaniu *uniwersalna stała gazowa* R dla gazu doskonałego zapisana być może jako różnica ciepła właściwego gazu przy stałym ciśnieniu c_p i przy stałej objętości c_v , które dla przyjętego modelu są stałe, tzn.:

$$R = c_p - c_v = \text{const} \quad (6.19)$$

Kolejnym uproszczeniem będzie założenie, że przepływ zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem, tzn. że mamy do czynienia z *izentropową przemianą termodynamiczną*, dla której równanie stanu przyjmuje postać:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$$

(6.20)

gdzie wykładnik izentropy κ obliczyć można ze związku:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (6.21)$$

Przyjęcie takiego modelu termodynamicznego zmusza nas do powtórnego wyprowadzenia równania Bernoulliego i w tym celu powtórnie wykorzystamy całkę Bernoulliego:

$$\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + g \cdot z = C = \text{const} \quad (6.3)$$

w której dla gazu pominięty być może człon ciśnienia hydrostatycznego, co prowadzi do związku:

$$\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C = \text{const}$$

Człon zawierający ciśnienie dla gazu doskonałego podlegającego przemianie izentropowej (wz. 6.20) zapisany być może z wykorzystaniem równania stanu (wz. 6.18) jako:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot R \cdot T = c_p \cdot T$$

co pozwala zapisać całkę Bernoulliego dla gazu ściśliwego jako:

$$\frac{U^2}{2} + c_p \cdot T = C = \text{const} \quad (6.22)$$

Równanie to można dalej przekształcić wykorzystując wz. 6.18 i 6.19 w sposób następujący:

$$c_p \cdot T = (R + c_v) \cdot T = \frac{p}{\rho} + c_v \cdot T$$

Ostatecznie równanie Bernoulliego dla gazu zmieniającego swą gęstość przyjmuje postać:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + c_v \cdot T = C = \text{const} \quad (6.23)$$

znaną jako *równanie Bernoulliego dla gazodynamiki*. Poznane wcześniej równanie Bernoulliego dla gazu o stałej gęstości (wz. 6.13) dla uproszczenia podzielone być może obustronnie przez przyspieszenie ziemskie, co daje:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C = \text{const} \quad (6.24)$$

Porównanie wz. 6.23 i 6.24 wskazuje, że obydwa te równania byłyby identyczne jeśli:

$$c_v \cdot T = C = \text{const}$$

co oznacza, że efekty ściśliwości byłyby pomijalne, jeśli temperatura T płynu nie zmieniałaby się znacząco w całym przepływie, tzn.

$$\frac{\Delta T}{T} \ll 1 \quad (6.25)$$

(należy pamiętać, że zmiana temperatury wywołuje zmiany gęstości płynu). Jeżeli rozpatrujemy przepływ gazu z prędkością U wówczas najwyższy możliwy przyrost temperatury uzyskamy po wyhamowaniu prędkości do zera, kiedy cała energia kinetyczna gazu zamieniona zostanie w energię potencjalną ciśnienia, która z kolei spręży gaz i wywoła maksymalny możliwy przyrost temperatury. Załóżmy zatem, że rozpatrujemy przepływ z punktem stagnacji, w którym wyhamowanie prędkości do zera spowoduje wzrost ciśnienia i wynikający stąd wzrost temperatury ΔT , dla którego to przepływu równanie Bernoulliego (wz. 6.22) zapisane być może jako:

$$\frac{U^2}{2} + c_p \cdot T = 0 + c_p \cdot (T + \Delta T)$$

Występujący w równ. (6.25) przyrost temperatury obliczony być może z powyższego równania jako:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{U^2}{2c_p \cdot T}$$

co po wykorzystaniu związków (6.19) i (6.21) pozwala zapisać:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{U^2}{\kappa RT} \cdot \frac{\kappa-1}{2} \quad (6.26)$$

W powyższym związku występuje *prędkość dźwięku*:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.27)$$

która związana jest z prędkością przepływu *liczbą Macha* (patrz wz. 8.15):

$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{\kappa RT}} \quad (6.28)$$

co po podstawieniu do wz. (6.26) pozwala zapisać względny przyrost temperatury w punkcie stagnacji:

$$\frac{\Delta T}{T} = M^2 \cdot \frac{\kappa - 1}{2} \quad (6.29)$$

Z wzoru powyższego wynika, że zmiana temperatury i wywołana tym zmiana gęstości jest proporcjonalna do kwadratu liczby M . Rozważmy przepływ powietrza ($\kappa = 1.41$) w temperaturze $20 [^{\circ} \text{C}]$ z prędkością $M=0.2$, wówczas z wz. (6.29) otrzymamy względną zmianę temperatury:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 0.008$$

której odpowiada bezwzględny przyrost temperatury:

$$\Delta T \approx 2 [K]$$

Łatwo sprawdzić, że zmiana gęstości gazu wywołana tak niewielkim przyrostem temperatury jest pomijalnie mała, co oznacza, że przepływy gazu z prędkościami nie przekraczającymi $M \approx 0.2$ mogą być opisywane klasycznym równaniem Bernoulliego, wyprowadzonym przy założeniu stałej gęstości płynu. Przepływy gazu przy większych wartościach liczby Macha muszą być opisane równaniem Bernoulliego dla gazodynamiki (wz. 6.23). Przykładowe wartości prędkości dźwięku dla warunków normalnych (p_{atm} ; $T \approx 293 [K]$) zestawiono w Tabl. 6. Jak można zauważyć, największą wartością prędkości dźwięku charakteryzuje się wodór, dla porównania warto pamiętać, że prędkość dźwięku dla cieczy jest znacznie wyższa (dla wody $a = 1490 [m/s]$), najwyższe wartości prędkości dźwięku występują dla ciał stałych (dla stali $a = 5060 [m/s]$, dla lodu $a = 3200 [m/s]$).

Tabela 6.1. Prędkości dźwięku dla wybranych gazów (zaczerpnięte z F.M. White, 1999)

Gaz	Prędkość dźwięku $a [m/s]$
powietrze	340
H ₂	1294
He	1000
CO ₂	266
CH ₄	185

7. Równanie Bernoulliego dla płynów lepkich

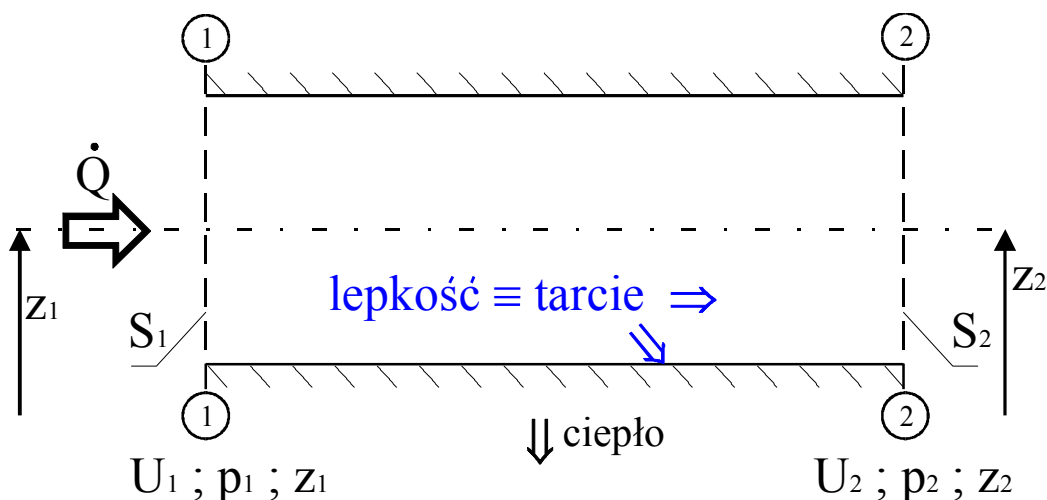
Równanie Bernoulliego obowiązuje dla płynów idealnych, gdyż tylko płyny pozbawione lepkości mogą przekształcać bez strat energię mechaniczną. Prostota tego równania sprawia jednak, że stosowane jest ono także i do opisu ruchu płynu lepkiego, mimo iż w tym przypadku wszystkie przemiany energii będą nieodwracalne, tzn. że przemiana jednej postaci energii w drugą zachodzić będzie ze sprawnością mniejszą od jedności. Oznacza to, że każdej przemianie towarzyszyć będzie strata pewnej części energii i że ta tracona ilość energii nie będzie mogła być dalej odzyskana.

7.1. Przemiany energii w płynie lepkim.

Przeanalizujemy przepływ płynu lepkiego przez kanał pokazany na rys. 7.1, w którym całkowita energia przepływu w przekroju 1-1, którą oznaczamy będziemy E_1 wynosi:

$$E_1 = \frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

gdzie U_1 jest średnią prędkością w przekroju 1-1, p_1 jest ciśnieniem statycznym a z_1 jest wysokością niwelacyjną środka analizowanego przekroju.



Rys.7.1. Przemiany energii w przepływie płynu lepkiego.

Natomiast w przekroju 2-2 całkowita energia mechaniczna będzie równa:

$$E_2 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2$$

gdzie poszczególne oznaczenia przyjęto jak w przekroju poprzedzającym.

W przepływie między przekrojami 1-1 oraz 2-2 płyn lepki traci energię na skutek tarcia wewnętrznego (tzn. płynu o płyn) jak i tarcia płynu o ścianę kanału. Tarcie zamienia energię w ciepło i przemiana ta nazywana dysypacją energii jest nieodwracalna, tzn. niemożliwa jest zamiana energii cieplnej traconej wskutek tarcia z powrotem w energię mechaniczną. Całkowita energia przepływu między kolejnymi przekrojami z rys. 7.1 spełnia zatem nierówność:

$$E_1 > E_2 \quad (7.1)$$

i pozostaje nam teraz określenie, która z form energii mechanicznej ujęta w równaniu Bernoulliego podlega dysypacji.

Równanie ciągłości dla rurki prądu zapisane być może następująco:

$$\dot{Q} = S_1 \cdot U_1 = S_2 U_2$$

gdzie \dot{Q} jest wydatkiem płynu, a jeżeli założymy, że przekrój kanału jest niezmienny, tzn.:

$$S_1 = S_2$$

wówczas także i prędkość oraz energia kinetyczna płynu między przekrojami pozostanie niezmienna:

$$E_{k1} = \frac{U_1^2}{2} = \frac{U_2^2}{2} = E_{k2}$$

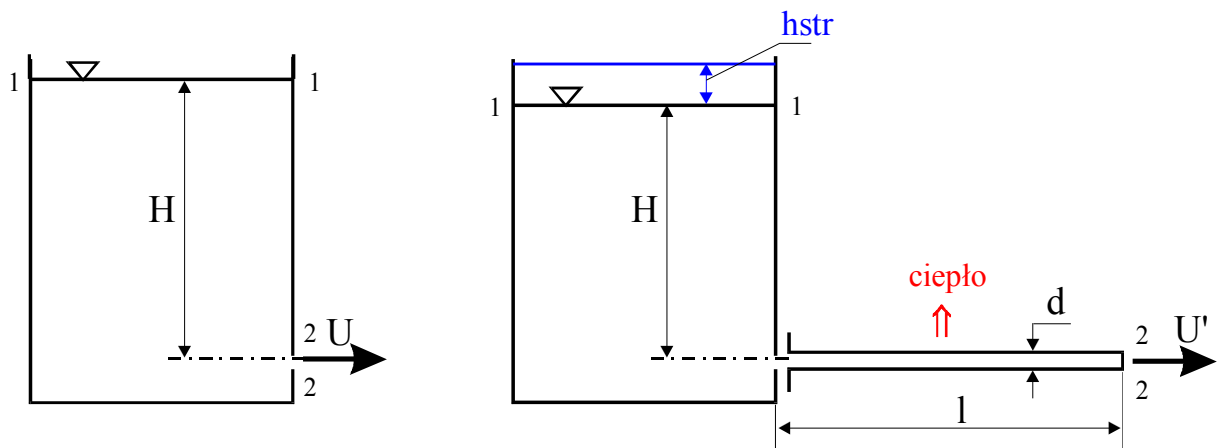
Założmy również, że zgodnie z rys. 7.1 kanał jest poziomy, co sprawia, że wysokość niwelacyjna, a co za tym idzie także i energia potencjalna położenia w poszczególnych przekrojach jest niezmienna

$$z_1 = z_2$$

Nierówność (7.1) wymaga zatem, aby spełniona była relacja:

$$p_1 > p_2$$

co oznacza, że dysypacja energii zachodząca w płynie lepkiem powoduje stratę energii potencjalnej ciśnienia między kolejnymi przekrojami. Wiemy już zatem, który z członów równania Bernoulliego wymaga korekty, a sposób jej wprowadzenia najłatwiej będzie uzasadnić analizując swobodny wypływ cieczy ze zbiornika, pokazany na rys. 7.2a.



Rys.7.2. Swobodny wypływ cieczy ze zbiornika a) oraz ilustracja wysokości traconej wskutek lepkości płynu b).

Mamy tu przemianę energii potencjalnej położenia cieczy znajdującej się na wysokości H (przekrój 1–1) w energię kinetyczną cieczy wypływającej z prędkością U z otworu, gdzie ulokowano przekrój kontrolny 2–2.

Jeżeli rozpatrywać będziemy przepływ cieczy nielepkiej, wówczas prędkość wypływu będzie równa prędkości swobodnego spadku w próżni, tzn.:

$$U = \sqrt{2gH} \quad (7.2)$$

a jeżeli uwzględnimy lepkość, wówczas tarcie w płynie przemieszczającym się w zbiorniku spowoduje, że prędkość wypływu będzie mniejsza i dana wzorem:

$$U = \alpha \cdot \sqrt{2gH} \quad (7.3)$$

gdzie $\alpha \leq 1$ jest tzw. współczynnikiem prędkości. Jeżeli do zbiornika (rys. 7.2b) dołączymy rurę o średnicy d identycznej ze średnicą otworu, wówczas siły tarcia spowodują na długości l rurociągu stratę ciśnienia Δp , na pokonanie której będzie musiała być zużyta część energii potencjalnej położenia. Prędkość wypływu będzie wówczas mniejsza i aby osiągnąć z powrotem prędkość teoretyczną daną wz. (7.2) koniecznym będzie zwiększenie wysokości napełnienia zbiornika o h_{str} , która zużyta zostanie zarówno na pokonanie sił tarcia płynu w zbiorniku jak i oporu tarcia powstającego przy przepływie przez rurę. Jeżeli

równanie Bernoulliego wyrazimy w postaci (6.5), wówczas dla zachowania równości energii występującej po obydwu stronach równania koniecznym będzie zwiększenie prawej strony o wysokość strat, odpowiadającą energii traconej wskutek lepkości. Równanie Bernoulliego dla przepływu między przekrojem 1–1 przechodzącym przez swobodną powierzchnię i przekrojem 2–2 na wylocie z rury (patrz rys. 7.2b), przyjmie wówczas postać:

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{str} \quad (7.4)$$

znaną jako równanie zachowania energii dla płynu lepkiego. Poprawka ujmująca lepka dysypację energii została wprowadzona w sposób arbitralny i dlatego też jej wartość nie może być wyprowadzona analitycznie lecz musi być określona doświadczalnie.

7.2. Straty wywołane tarciem płynu

Na rys. 7.1 pokazano, że w trakcie przepływu płynu lepkiego dysypacja energii spowodowana tarciem zachodzi zarówno wewnątrz przepływu (tarcie wewnętrzne w płynie) jak i na ścianie, gdzie płyn pokonywać musi siły tarcia płynu o materiał rurociągu. Profil prędkości przepływu turbulentnego dany potęgowym prawem Prandtla (wz. (3.50)) oraz paraboliczny profil prędkości przepływu laminarnego dany wz. (3.38) wskazują, że największy gradient prędkości w obydwu rodzajach przepływu występuje w pobliżu ściany. Prawo tarcia Newtona sugeruje zatem, że największe wartości naprężeń stycznych występować będą na ścianie kanału co oznacza z kolei, że nie tarcie wewnętrzne w płynie lecz siły tarcia płynu o ścianę rurociągu są głównym źródłem oporu przy przepływie cieczy rzeczywistej przez kanały. Najpowszechniej stosowanym kształtem przekroju poprzecznego jest przekrój kołowy i dlatego też *wszystkie zależności podane w tym rozdziale będą dotyczyć przepływów przez rurociągi o kołowym przekroju poprzecznym*. Doświadczenie wykazało, że opór określony wysokością strat (patrz rys. 7.2b) rośnie wraz z długością rurociągu i maleje przy zwiększaniu średnicy rury i zależy od szorstkości materiału ściany rurociągu. Większość przepływów występujących w technice to przepływy turbulenty dla których straty proporcjonalne są do kwadratu prędkości i dlatego też dla *strat spowodowanych tarciem płynu o ściany rurociągu zaproponowano następujący wzór empiryczny*:

$$h_{str} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (7.5)$$

w którym:

- l - długość rurociągu
- d - średnica rurociągu
- U - średnia prędkość przepływu przez rurociąg
- g - przyspieszenie ziemskie
- λ - współczynnik tarcia płynu o ścianę rurociągu.

Łatwo sprawdzić, że dla zachowania spójności wymiarowej tego równania λ winno być bezwymiarowe, a ponieważ dla przepływu laminarnego znane jest rozwiązanie Hagen-Poiseuille'a, stąd możliwe było określenie wartości współczynnika λ na drodze analitycznej. Jeżeli przekształcimy wz. (3.40) do postaci:

$$\Delta p = \frac{128 \mu Q \cdot l}{\pi d^4}$$

i podstawimy wyrażenie na prędkość średnią:

$$U = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

oraz stratę ciśnienia:

$$\Delta p = h_{str} \cdot \rho \cdot g$$

otrzymamy następujące wyrażenie na wysokość strat:

$$h_{\text{str}} = \frac{32\nu}{d} \cdot \frac{l}{d} \frac{U}{g}$$

Jeżeli przekształcimy ten związek w taki sposób, aby był on zgodny ze wz. (7.5) będziemy mogli zapisać:

$$h_{\text{str}} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (7.6)$$

skąd wynika, iż współczynnik tarcia płynu o ściany rurociągu dla przepływu laminarnego wynosi:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7.7)$$

Uzyskanie analogicznego rozwiązania dla przepływu turbulentnego nie jest możliwe i stąd też dla tego przypadku konieczne jest stosowanie wzorów empirycznych, w których wartość współczynnika λ musi być określana doświadczalnie. Badania zmienności współczynnika strat tarcia λ wykonywano dla różnych długości, średnic i szorstkości rurociągów, zmieniając prędkość przepływu w zakresie pokrywającym wszystkie możliwe w praktyce zastosowania, próbując dopasować wartość współczynnika λ w taki sposób, aby uzyskać zgodność z doświadczalnie określoną wartością wysokości strat. Problem ten był przedmiotem systematycznych badań, które przez wiele lat nie dawały wystarczająco dokładnego rozwiązania. Współczynnik strat λ zmienia się bowiem wraz z prędkością przepływu, kształtem i wysokością nierówności, ich ilością przypadającą na jednostkę powierzchni oraz sposobem ich zgrupowania. Po wielu latach prób zagadnienie to doczekało się dwóch wystarczająco dokładnych rozwiązań znanych obecnie jako:

- wykres Nikuradse
- wzory empiryczne.

Rozwiązanie pierwsze uzyskał w latach 30. J. Nikuradse który stwierdził, że rzeczywista chropowatość ścian kanału wykazuje tak dużą zmienność i zależy od tak wielu czynników, że niemożliwe jest ich wiarygodne odtworzenie. Dlatego też w swoim eksperymencie Nikuradse uzyskał równomierną szorstkość pokrywając powierzchnię rury kalibrowanymi ziarnami piasku o różnych średnicach dobranych w taki sposób, aby dla każdej z badanych rur możliwe było uzyskanie zmienności tzw. *współczynnika chropowatości* w zakresie:

$$r/s = 5 \div 500$$

gdzie:

s - średnica ziaren piasku odpowiadająca wysokości chropowatości ścian rury

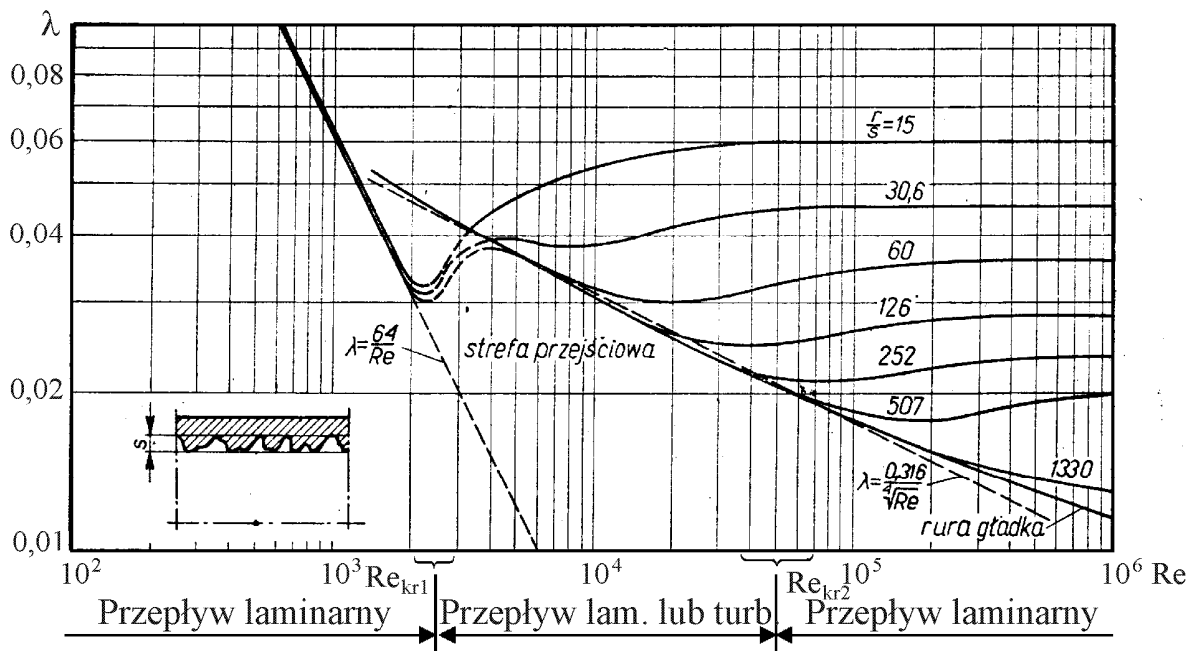
r = d/2 - promień rury.

Badania Nikuradse przeprowadzone były dla trzech zaledwie średnic rur:

$$d = 25, 50, 100 \text{ [mm]}$$

lecz użyteczność ich wyników skłoniła wkrótce innych eksperymentatorów do wykonania badań uzupełniających. Otrzymany w ten sposób wykres pokazany na rys. 7.3, przedstawia zmienność współczynnika strat tarcia λ w funkcji liczby Reynoldsa, a parametrem tego wykresu jest współczynnik chropowatości r/s.

Zebrane tu wyniki pomiarów potwierdzają po pierwsze, że dla przepływu laminarnego prawdziwy jest związek (7.7) uzyskany z rozwiązania Hagen-Poiseuille'a a po drugie, że wartość tego współczynnika nie zależy od szorstkości ścian. Po przekroczeniu 1-szej krytycznej wartości liczby Reynoldsa zauważyć można przejście przepływu w inny zakres i pojawienie się związku między wartością współczynnika strat λ a chropowatością przewodu. Linie przerywane zaznaczone w obszarze pośrednim pokazują przy tym jedynie sposób przejścia między zakresami przepływu laminarnego i turbulentnego, gdyż samo przejście jest przecież procesem utraty stabilności i zachodzi na tyle gwałtownie, że nie można tu mówić o przepływie przejściowym.



Rys.7.3. Wykres Nikuradse.

W obszarze przepływu turbulentnego dla rur tzw. technicznie gładkich wartości współczynników λ układają się z dobrym przybliżeniem wokół zależności empirycznej podanej przez Blasiusa:

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad (7.8)$$

Jeżeli wyliczymy wysokość strat dla rur gładkich korzystając ze wzoru Blasiusa, otrzymamy:

$$h_{str} = \frac{0.316}{\left(\frac{U \cdot d}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

skąd wynika, że straty przepływu dla rur gładkich nie są proporcjonalne do kwadratu prędkości lecz do średniej prędkości przepływu w potęgę:

$$h_{str} \sim U^{7/4} \quad (7.9)$$

Można stąd wnioskować, że w ruchu turbulentnym w rurach gładkich występuje w pewnej części przepływu proporcjonalność do pierwszej potęgi prędkości, charakterystyczna dla ruchu laminarnego powodująca, że sumaryczny wykładnik w zal. (7.9) jest mniejszy niż należałoby oczekiwać dla przepływu turbulentnego. Obecnie wiemy, że w przepływie turbulentnym w bezpośredniej bliskości ściany występuje bardzo cienka warstwa płynu o własnościach zbliżonych do przepływu laminarnego nazywana *subwarstwą laminarną* lub bardziej poprawnie *subwarstwą lepka*.

Linia wyznaczona na wykresie Nikuradse przez równ. (7.8) pokrywa się z danymi eksperymentalnymi do liczby Reynoldsa

$$Re \approx 8 \cdot 10^4$$

natomiast dla mniejszych wartości r/s (tzw. większych chropowatości względnych) krzywe doświadczalne odchylają się od linii Blasiusa przy znacznie mniejszych wartościach Re . Przyczyną jest zmniejszenie się grubości subwarstwy lepkiej przy wzroście liczby Re powodujące, że nierówności powierzchni zaczynają „wynurzać” się z warstwy płynu

zdominowanej przez lepkość, czemu towarzyszy wzrost wartości współczynnika tarcia λ przy dalszym zwiększaniu liczby Reynoldsa. Jeżeli wysokość nierówności powierzchni s jest natomiast mniejsza od grubości subwarstwy lepkiej, wówczas rurociąg jest *hydraulicznie gładki*, tzn. współczynnik tarcia λ jest identyczny jak dla rury gładkiej.

Warto również zauważyć, że dla każdej wartości parametru chropowatości r/s istnieje pewna wartość Re , powyżej której wartość współczynnika strat tarcia λ stabilizuje się, co zgodnie ze wz. (7.5) oznacza proporcjonalność strat do kwadratu średniej prędkości przepływu:

$$\lambda = \text{idem}; h_{\text{str}} \sim U^2$$

Korzystanie z wykresu Nikuradse wymaga znajomości średniej wysokości nierówności s ściany rozpatrywanego kanału oraz średniej prędkości przepływu i wówczas dla wyliczonej pary wartości:

$$r/s; Re$$

z wykresu Nikuradse możemy odczytać poszukiwaną wartość współczynnika λ . Proces poszukiwania rozwiązania można uprościć korzystając z empirycznej zależności Nikuradse:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{r}{s} + 1.74\right)^2} \quad (7.10)$$

aproxymującej z dobrą dokładnością krzywe z rys. 7.3.

Badania Nikuradse mają dużą wartość poznawczą, gdyż uzyskane wyniki pozwoliły na poznanie tendencji i prawidłowości procesów wynikających z tarcia płynu o ściany rurociągów. Wadą wykresu Nikuradse jest natomiast przyjęcie modelowego sposobu opisu chropowatości, gdyż nierówności powierzchni spotykanych w praktyce nie są tak równomierne jak kalibrowana chropowatość piaskowa. Z tego też powodu dane zawarte na wykresie Nikuradse nie zawsze sprawdzają się w zastosowaniach praktycznych i dlatego też przeprowadzono bardzo wiele badań, których celem było opracowanie formuł pozwalających na uzyskanie dokładności zadowalającej projektantów rurociągów. Dużą popularność zdobyły wieloczłonowe wzory empiryczne o następującej strukturze:

$$\lambda = K_1 + K_2 \left(\frac{1}{Re}\right)^a \quad (7.11)$$

gdzie K_1, K_2, a - stałe wyznaczone doświadczalnie, które pozwalają odtworzyć rzeczywisty przebieg współczynnika tarcia a w szczególności asymptotyczne dążenie współczynnika λ do stałej wartości przy dużych wartościach liczb Reynoldsa, tzn.

$$Re \rightarrow \infty; \lambda \rightarrow K_1$$

Przykładem takiej zależności jest formuła Schillera i Hermana

$$\lambda = 0.0054 + 0.396 (Re)^{-0.3} \quad (7.12)$$

która z dobrą dokładnością opisuje współczynnik tarcia dla rur gładkich w zakresie:

$$Re < 1.5 \cdot 10^6$$

Dla uzyskania zadowalającej dokładności współczynnika λ dla rur o szorstkich ścianach konieczne jest stosowanie wzorów o bardziej złożonej strukturze, czego przykładem może być wzór Misesa:

$$\lambda = 0.0096 + 4 \sqrt{\frac{K}{r}} + 1.2 \sqrt{\frac{2}{Re}} \quad (7.13)$$

gdzie:

r - promień rury

K - współczynnik zależny od rodzaju materiału ściany i jej stanu.

Po przeprowadzeniu systematycznych badań Mises podał następujące wartości współczynnika K dla najczęściej stosowanych materiałów:

Rury szklane	$K = (0.2 \div 0.8) \cdot 10^{-8} [\text{m}]$
Rury mosiężne	$K = (0.2 \div 1.0) \cdot 10^{-8} [\text{m}]$
Rury stalowe	$K = (2.0 \div 50) \cdot 10^{-8} [\text{m}]$
Rury żeliwne nowe	$K = (100 \div 200) \cdot 10^{-8} [\text{m}]$
Rury żeliwne skorodowane	$K = (250 \div 500) \cdot 10^{-8} [\text{m}]$.

Zwraca uwagę szeroki zakres zmienności parametru K obserwowany dla tego samego materiału, co sugeruje duży rozrzut wartości zmierzonych eksperymentalnie i nie pozwala oczekiwać zbyt dużej dokładności tej formuły.

Jedną z najbardziej popularnych zależności pozwalających na wyznaczenie współczynnika λ dla rur o dowolnej chropowatości jest formuła Colebrooke'a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log \left(\frac{S}{3.7d} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (7.14)$$

która zapewnia dokładność $\pm 15\%$ w zakresie przepływu turbulentnego ograniczonego przedziałem liczb Reynoldsa:

$$4 \cdot 10^3 < \text{Re} < 10^8$$

Zależność Colebrooke'a przedstawia współczynnik λ w postaci uwikłanej i musi być ona zatem rozwiązywana numerycznie. Znacznie łatwiejsze jest natomiast korzystanie z wykresu Moody'ego, który przedstawił rozwiązanie równ. (7.14) w postaci wykresu sporządzonego w sposób analogiczny do wykresu Nikuradse. Wykres Moody'ego może być używany zarówno do wyznaczania oporów tarcia w rurociągach jak też w kanałach otwartych i przepływach w warstwie przyściennej a znaleźć ten wykres można m.in. w książce F.White'a.

Jeszcze łatwiejszy sposób korzystania z formuły Colebrooke'a zaproponował w latach osiemdziesiątych Haaland, którego formuła pozwalająca na bezpośrednie wyliczenie współczynnika tarcia ma postać:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{S}{3.7d} \right)^{1.11} \right]$$

i aproksymuje wyniki uzyskane ze wz. (7.14) z dokładnością $\pm 2\%$.

Reasumując dotychczasowe rozważania należy stwierdzić, że stopień uproszczenia problematyki strat tarcia przyjęty przez Nikuradse jest na tyle duży, że wykres 7.3 i zał. (7.10) oparte o chropowatość równoważną (nazywaną również chropowatością piaskową) nie mogą być zalecane do zastosowań praktycznych. Znacznie dokładniejsze wyniki uzyskać można z zależności i wykresów empirycznych, które aproksymują wyniki badań oporu uzyskane w warunkach rzeczywistych. W tej grupie zależności najlepsze wyniki dają z kolei formuły oparte o wielkości fizyczne które mogą być wyznaczone w sposób jednoznaczny, takie jak np. charakterystyczna wysokość chropowatości ścian, występująca we wzorach Colebrooke'a i Haaland'a czy też na wykresie Moody'ego. Wzory operujące bliżej nie sprecyzowanymi stałymi (np. wz. Schillera i Hermanna) lub też stałymi zależnymi od użytego materiału (wz. Mises'a) z reguły nie zapewniają pożądanej dokładności. Przekonuje o tym chociażby bardzo szeroki zakres zmienności stałych K we wz. (7.13), a „niefizyczność” tej stałej utrudnia dodatkowo jej prawidłowy dobór.

Nieemożliwe jest także określenie „a priori” wartości współczynników chropowatości nawet dla typowych, dostępnych w handlu rur, gdyż wartość chropowatości s zależy w znacznym stopniu od przyjętej technologii wytwarzania. Przykładowo, w książce F.White'a podane są wysokości chropowatości zmieniające się od:

$$s = 0.0015 [\text{mm}]$$

dla rur plastikowych, do wartości:

$$s = 2 [\text{mm}]$$

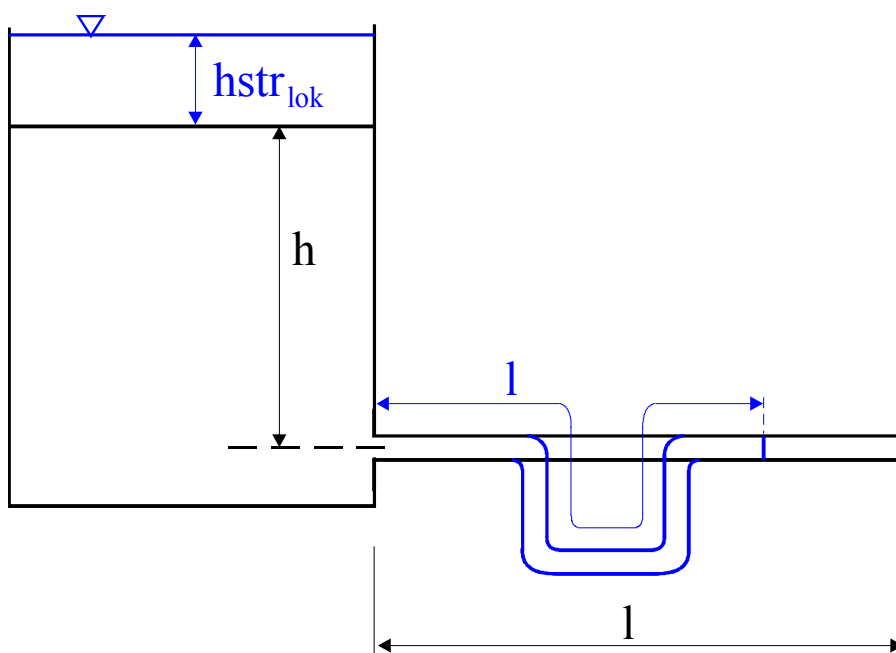
dla rur betonowych nie wygładzanych, ale każda z tych wartości ma przedział błędu:

± 60%.

Oznacza to, że dla uzyskania odpowiedniej dokładności obliczeń konieczne jest indywidualne określenie chropowatości analizowanych rurociągów.

7.3. Straty lokalne

W przepływach przez rurociągi oprócz strat spowodowanych tarciem płynu o ściany występuje jeszcze jeden rodzaj strat, którego źródłem są zmiany kierunku i przekroju poprzecznego przepływu. W każdej instalacji montowana jest armatura taka jak zawory, kolana, trójniki, filtry, zwężki pomiarowe itp., w których dochodzi do zmian kierunku czy też przekroju przepływu. Wszystkie te urządzenia są źródłem strat energii i powodują dodatkowe opory przepływu. Przekonać o tym może „myślowe” doświadczenie pokazane na rys. 7.4, w którym do zbiornika napełnionego do wysokości h podłączony jest prostoosiowy rurociąg o długości l , przez który przepływa ciecz z prędkością U .



Rys.7.4. Dodatkowa wysokość strat spowodowana występowaniem zmian kierunku przepływu.

Jeżeli rurociąg ten ukształtujemy jak na rysunku, tzn. wprowadzimy cztery kolana nie zmieniając przy tym całkowitej jego długości l , wówczas w kolanach powstaną dodatkowe straty ciśnienia i przepływ przez rurociąg będzie odbywał się z mniejszą prędkością. Dla utrzymania tej samej prędkości przepływu konieczne będzie zwiększenie wysokości napełnienia zbiornika o:

$$h_{\text{str lok}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{strata ciśnienia spowodowana} \\ \text{zmianą kierunku przepływu} \end{array} \right\}$$

Ten typ strat nazywamy *lokalnymi* gdyż zachodzą one jedynie w ściśle określonych miejscach i powodują straty ciśnienia zmniejszające tę część energii potencjalnej, która może być zamieniona na energię potencjalną, co zapisać można:

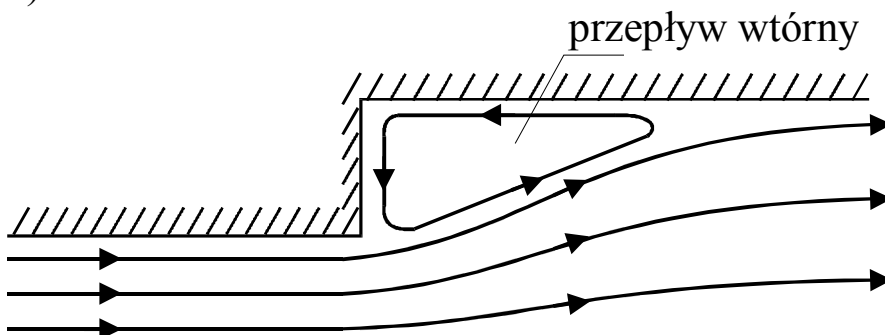
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{potencja ln a} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{kinetyczna} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{energia strat} \\ \text{loka ln ych} \end{array} \right\}$$

Dlatego też wysokość strat lokalnych wyrażamy zazwyczaj jako pewną część wysokości prędkości:

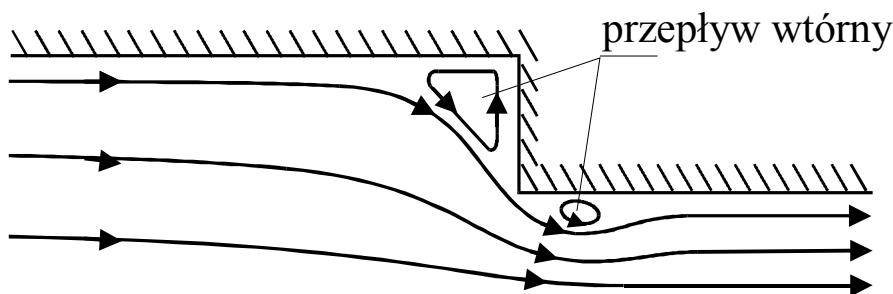
$$h_{\text{str}_{\text{lok}}} = \xi \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (7.16)$$

gdzie ξ jest współczynnikiem strat lokalnych określonym doświadczalnie lub w niektórych wypadkach także i analitycznie. Współczynnik ten w ogólnym przypadku zależy przede wszystkim od rodzaju przeszkody ale także i od prędkości przepływu, chociaż mechanizm powstawania tego zjawiska jest jednakowy dla wszystkich typów strat lokalnych. We wszystkich przypadkach mamy bowiem do czynienia z powstawaniem tzw. *przepływów wtórnych*, których kierunek ruchu jest inny od zasadniczego kierunku przepływu. Przykład takich przepływów pokazano na rys. 7.5a i b, gdzie w obecności gwałtownej zmiany przekroju poprzecznego siły bezwładności powodują, że linie prądu nie naśladują kształtu ściany. Płyn znajdujący się w strefach, gdzie nie odbywa się przepływ jest na skutek działania sił lepkości wprawiany w ruch cyrkulacyjny tworząc w ten sposób strefy przepływów wtórnych (nazywane również strefami recyrkulacji), których rozmiar decyduje o wielkości strat energii. Energia potrzebna do utrzymania ruchu w strefach recyrkulacji odbierana jest z energii kinetycznej przepływu zasadniczego a płyn krąży w nich po torach zamkniętych pokonując opory tarcia i zamienia w ciepło strumień energii odebranej od przepływu głównego. Rozmiar strefy recyrkulacji decyduje o wielkości strat i dlatego w przypadku przepływu w kanale rozszerzającym się (rys. 7.5a) gdzie rozmiar strefy recyrkulacji jest największy, straty są większe niż w kanale o zmniejszającym się przekroju poprzecznym (rys. 7.5b).

a)



b)



Rys.7.5. Mechanizm powstawania strat lokalnych w przepływie z gwałtownym rozszerzeniem a) i przewężeniem przekroju poprzecznego b).

Przykładowo, dla kanału o stosunku przekrojów:

$$S_1/S_2 = 0.5$$

przepływ w kierunku zwiększającego się przekroju daje wartość strat lokalnych

$$\xi = 0.25$$

podczas gdy dla przepływu w kierunku przeciwnym współczynnik straty lokalnej jest wyraźnie mniejszy i wynosi:

$$\xi = 0.18$$

Warto przy tym zauważyć, że dla przepływu przez gwałtowne rozszerzenie współczynnik strat lokalnych może być obliczony ze stosunku przekrojów jako:

$$\xi = \left[1 - \frac{S_1}{S_2}\right]^2 \quad (7.17)$$

gdzie:

S_1 - pole przekroju wlotowego

S_2 - pole przekroju wylotowego.

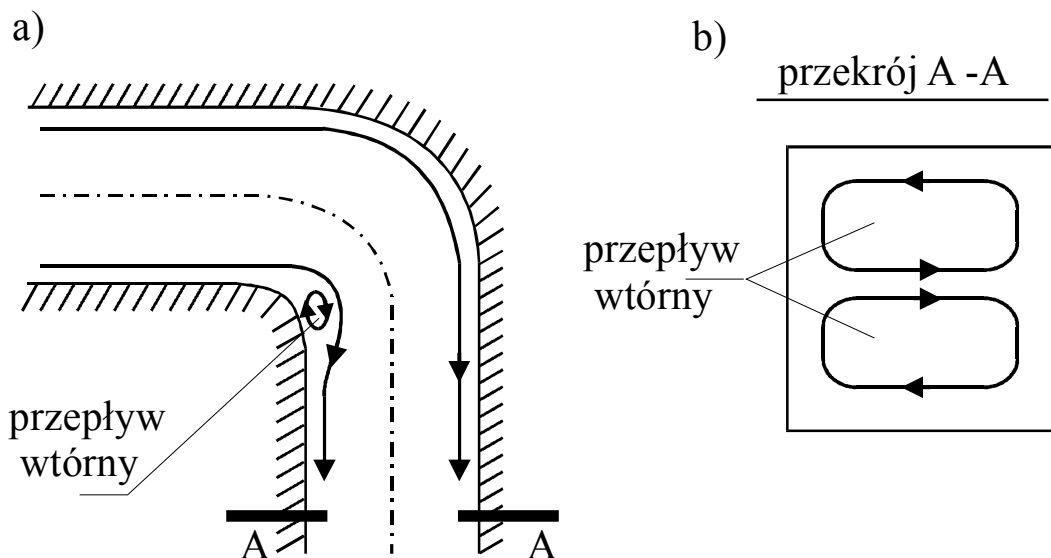
Zależność powyższa wynika z twierdzenia o zmianie pędu Bordy-Carnot'a, przy czym dokładniejsze oszacowanie wysokości straty lokalnej dla przepływu przez kanał o nagłym rozszerzeniu uzyskać można z zależności empirycznej:

$$h_{\text{strlok}} = 1.098 \frac{(U_1 - U_2)^{1.919}}{2g} \quad (7.18)$$

gdzie:

U_1 - prędkość w przekroju wlotowym

U_2 - prędkość w przekroju wylotowym.



Rys.7.6. Straty lokalne spowodowane wystąpieniem przepływów wtórnych w płaszczyźnie przepływu a) i płaszczyźnie prostopadłej do przepływu b).

Znacznie bardziej złożony jest mechanizm powstawania strat lokalnych w kanałach zmieniających kierunek przepływu takich jak np. kolano pokazane na rys. 7.6. W płaszczyźnie przepływu (rys. 7.6a) siły bezwładności powodują, że powstaje tu strefa recyrkulacji, w której tak jak poprzednio płyn krąży po zamkniętych torach i dysypuje energię pobraną od przepływu głównego. Dodatkowe straty energii przy przepływie w kolanie powstają natomiast w płaszczyźnie prostopadłej do przepływu głównego (rys. 7.6a) gdzie pojawiają się dodatkowe siły bezwładności spowodowane zakrzywieniem linii prądu. W rezultacie pojawiają się dodatkowe przepływy wtórne w płaszczyźnie prostopadłej do przepływu (rys. 7.6b) i w wyniku superpozycji ruchu głównego i wtórnego elementy płynu poruszają się ruchem spiralnym, czemu towarzyszą dodatkowe straty energii. Przykładowo,

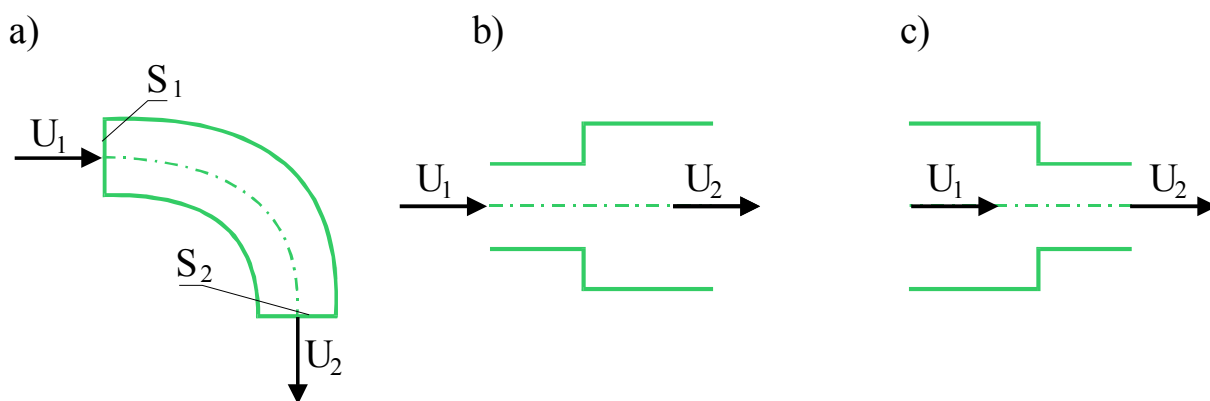
dla kolan zmieniających kierunek przepływu o 90° wartość współczynnika oporu może wynosić:

$$\xi = 0.15 \div 0.5$$

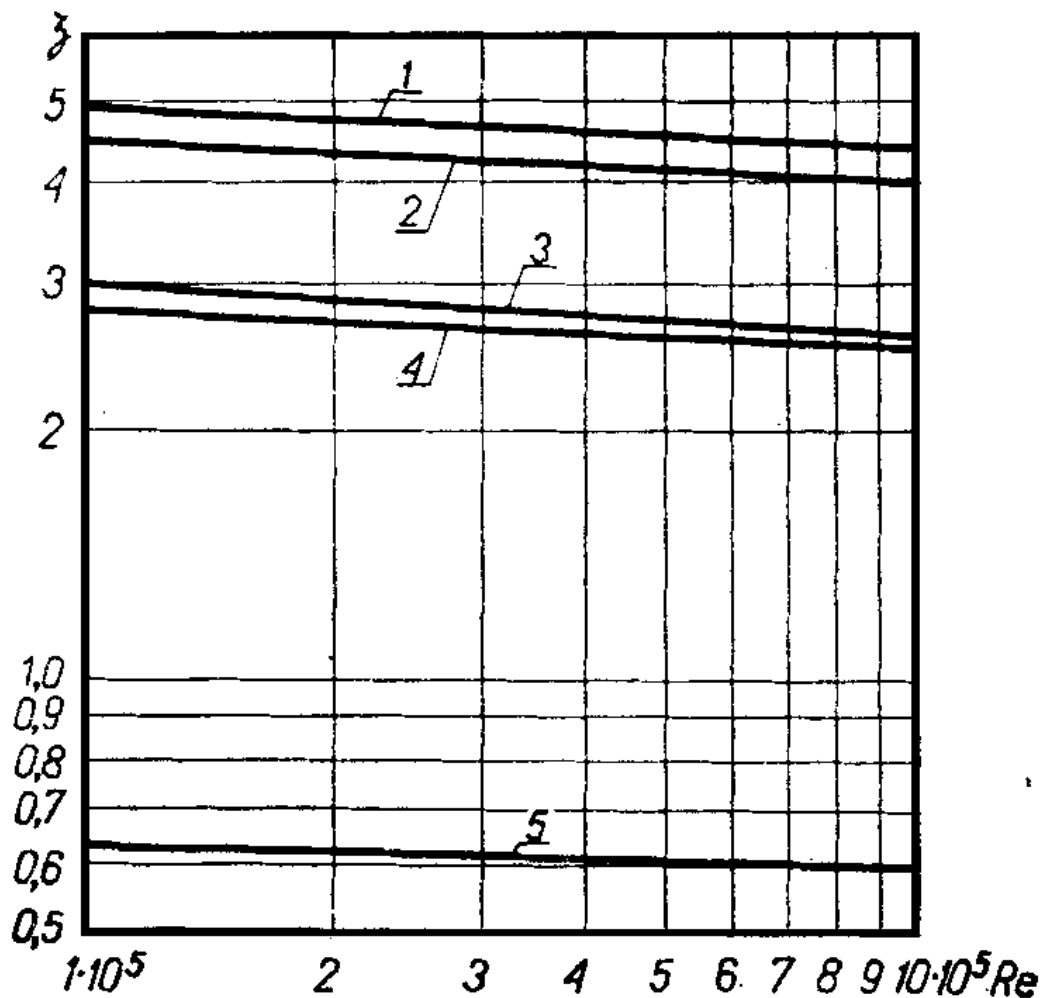
w zależności od stosunku promienia krzywizny do długości boku przekroju poprzecznego kanału (zagadnienie to zostanie omówione szerzej w jednym z następných rozdziałów).

Wartości współczynników strat lokalnych podawane są w poradnikach projektantów i wielu podręcznikach, przy czym zgodnie z przyjętą konwencją wysokość strat lokalnych oblicza się mnożąc wartość współczynnika strat ξ przez wysokość prędkości za przeszkodą. Przykłady zastosowań tej konwencji pokazano na rys. 7.7 dla trzech różnych przeszkód, przy czym wysokości strat w każdym przypadku winny być odniesione do prędkości za przeszkodą, tzn.:

$$(h_{\text{strlok}})_a = (h_{\text{strlok}})_b = (h_{\text{strlok}})_c = \xi \frac{U_2^2}{2g} \quad (7.19)$$

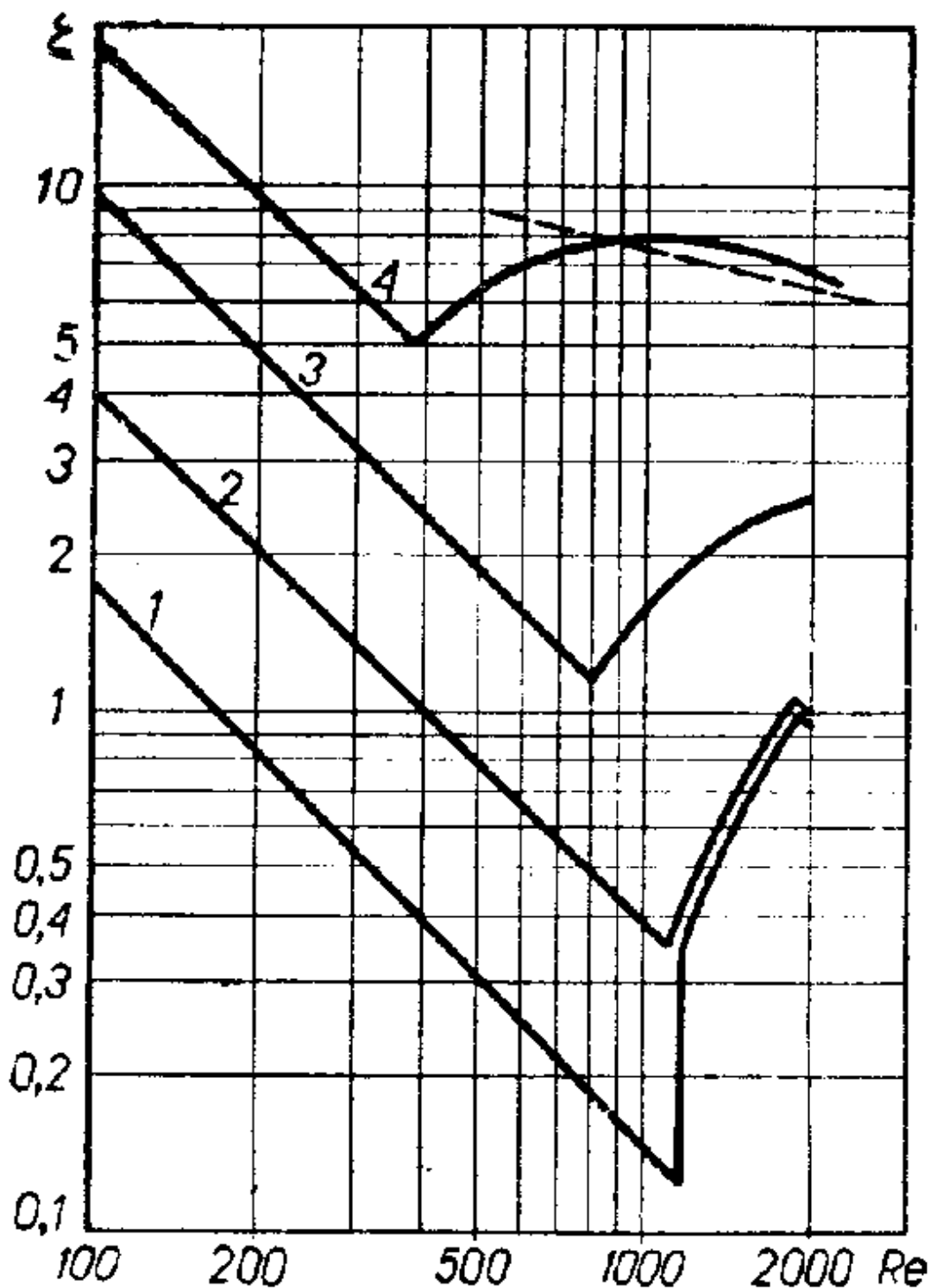


Rys.7.7. Ilustracja sposobu obliczania wysokości strat lokalnych dla kolana a) oraz przepływu przez gwałtowne rozszerzenie b) i zwężenie kanału c).



Rys.7.8. Współczynnik strat lokalnych w zakresie przepływu turbulentnego dla zaworów zwykłych (1,2), zaworów z zamknięciem ukośnym (3,4) oraz zasuw (5).

W zakresie przepływu turbulentnego wartości współczynników strat lokalnych w bardzo niewielkim stopniu zależą od prędkości przepływu (liczby Reynoldsa), czego przykład pokazano na rys. 7.8 dla wybranych konstrukcji zaworów. Straty pokazanych tu zaworów są praktycznie stałe w całym analizowanym zakresie liczb Reynoldsa, lecz zwraca tu uwagę blisko dziesięciokrotna różnica wartości współczynników strat zaworów o przepływie prostoliniowym (zasuw – krzywa 5) i zaworów zwykłych (krzywe 1,2), których konstrukcja wymusza gwałtowne zmiany przekroju i kierunku przepływu.

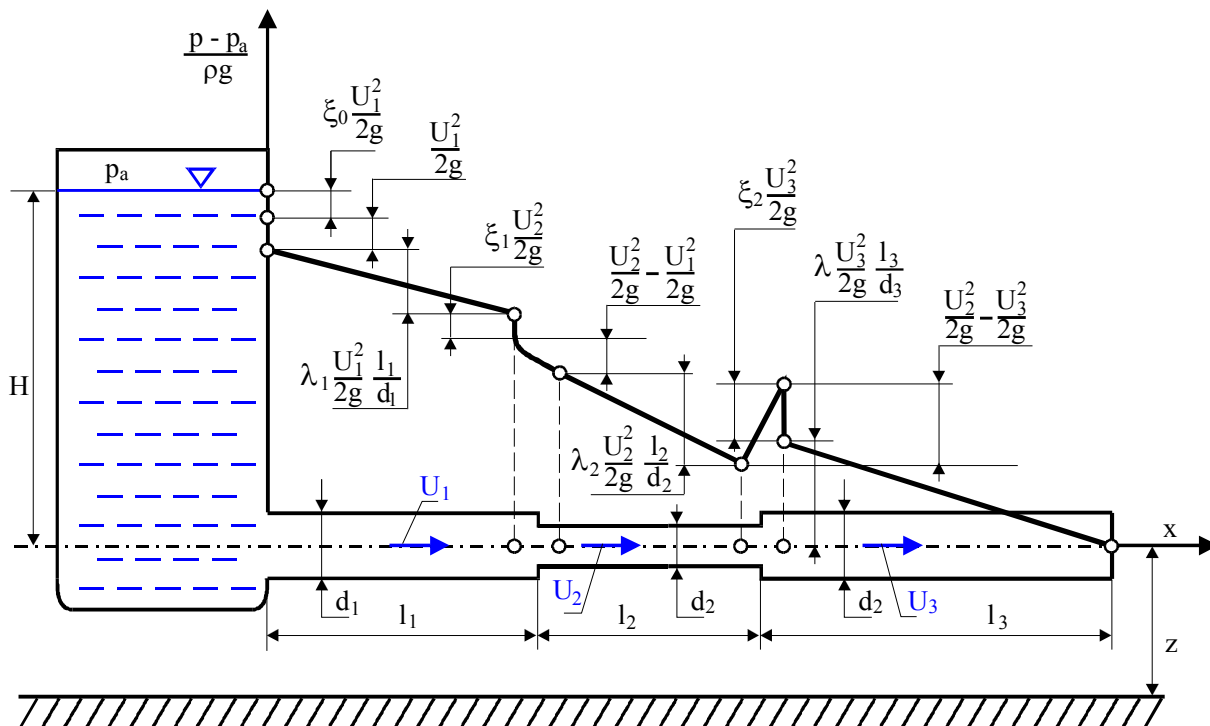


Rys.7.9. Współczynnik strat lokalnych w zakresie przepływu laminarnego dla zasuw (1,2), zaworów z zamknięciem ukośnym (3) i zaworów zwykłych (4).

W zakresie przepływu laminarnego straty tych samych typów zaworów pokazane na rys. 7.9 zależą silnie od liczby Reynoldsa, przy czym dla niższych wartości Re widoczna jest proporcjonalność wysokości strat do pierwszej potęgi prędkości powodująca spadek wartości współczynnika strat ξ (analogia z wykresem Nikuradse – rys. 7.3). Także i w tym przypadku widoczna jest zależność współczynnika strat od konstrukcji zaworu, przy czym widać tu również, że gorsze ukształtowanie przepływu przez zawory z ukośnym zamknięciem i zawory zwykłe (krzywe 3 i 4) powoduje wcześniejsze wystąpienie przejścia laminarno-turbulentnego, czemu towarzyszy wyraźny wzrost wartości współczynnika strat lokalnych.

7.4. Interpretacja przemian energii w przepływie płynu rzeczywistego

Poddamy analizie zmienność ciśnienia w instalacji pokazanej na rys. 7.10, połączonej ze zbiornikiem napełnionym do wysokości H ponad poziom odniesienia, którym jest oś poziomego rurociągu. Zbiornik modeluje tu stałe ciśnienie zasilania na wlocie do rurociągu, przy czym w rzeczywistości może tu być zainstalowana pompa o wysokości podnoszenia H przy wydatku Q przepływającym przez rurociąg. Założmy, podobnie jak zrobiliśmy to w rozdz. 6.2, że wzdłuż całej długości rurociągu podłączymy pionowe, przezroczyste rurki (rurki piezometryczne), w których ciecz będzie mogła swobodnie wznosić się do wysokości równoważące panujące w rurociągu ciśnienie statyczne. Jeżeli zatkamy wylot z rurociągu, wówczas poziom cieczy we wszystkich rurkach będzie taki sam jak w zbiorniku, gdyż dla cieczy nieruchomej będzie to przypadek równowagi cieczy w naczyniach połączonych.



Rys.7.10. Linia piezometryczna w przepływie płynu lepkiego przez rurociąg.

Jeżeli odślonimy wylot z rurociągu, wówczas ustali się w nim przepływ płynu o wydatku Q takim, że:

$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot U_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot U_2 = \frac{\pi d_3^2}{4} \cdot U_3$$

Jednocześnie poziomy cieczy w rurkach ustalą się tak, że linia wykreślona przez swobodne powierzchnie utworzy pokazaną na rys. 7.10 *linię piezometryczną*. Spadek poziomu cieczy na wlocie do rurociągu jest wywołany przemianą energii potencjalnej ciśnienia nieruchomej cieczy w zbiorniku w energię kinetyczną płynu poruszającego się z prędkością U_1 w rurze o średnicy d_1 , przy czym zmiana energii kinetycznej wynosi:

$$\frac{U_1^2}{2g} \quad (7.20)$$

Jednocześnie płyn traci energię na skutek straty lokalnej na wlocie, która przy wartości współczynnika strat wynoszącej ξ_0 jest równa:

$$\xi_0 \frac{U_1^2}{2g} \quad (7.21)$$

Kolejny odcinek linii piezometrycznej to spadek wysokości ciśnienia spowodowany stratami tarcia płynu o ściany, który wobec stałości średnicy d_1 , prędkości U_1 i współczynnika strat λ_1 zmienia się liniowo w funkcji długości przewodu l_1 :

$$\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{U_1^2}{2g} = f(l_1) \quad (7.22)$$

Spadek linii piezometrycznej występujący w miejscu przewężenia rurociągu jest wynikiem kolejnej przemiany energii potencjalnej ciśnienia w przyrost energii kinetycznej:

$$\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} \quad (7.23)$$

oraz straty lokalnej wywołanej gwałtownym przewężeniem rurociągu, który przy wartości współczynnika ξ_1 wynosi:

$$\xi_1 \frac{U_2^2}{2g} \quad (7.24)$$

(należy zwrócić uwagę, że odniesiony jest on do prędkości *za przeszkodą*). Wzdłuż odcinka rurociągu o średnicy d_2 i długości l_2 występują straty tarcia również liniowo narastające wzdłuż rurociągu:

$$\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{U_2^2}{2g} \quad (7.25)$$

W miejscu gwałtownego rozszerzenia przekroju zmienność linii piezometrycznej jest wynikiem sumowania dwóch przeciwnych tendencji, z której pierwszą jest przyrost wysokości ciśnienia spowodowany spadkiem energii kinetycznej płynu:

$$\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_3^2}{2g} \quad (7.26)$$

oraz lokalną stratą ciśnienia równą:

$$\xi_2 \frac{U_3^2}{2g} \quad (7.27)$$

Na rys.7.10 dla uzyskania większej przejrzystości analizy naniesiono kolejno przebiegi ciśnień odpowiadające przemianom opisanym wz. (7.26) i (7.27), natomiast w rzeczywistości obydwie te procesy zachodzący będą jednocześnie i linia piezometryczna połączy bezpośrednio punkty początku i końca tej przemiany. Ostatnią przemianą widoczną na linii piezometrycznej jest strata zachodząca wskutek tarcia płynu o ściany rurociągu wynosząca:

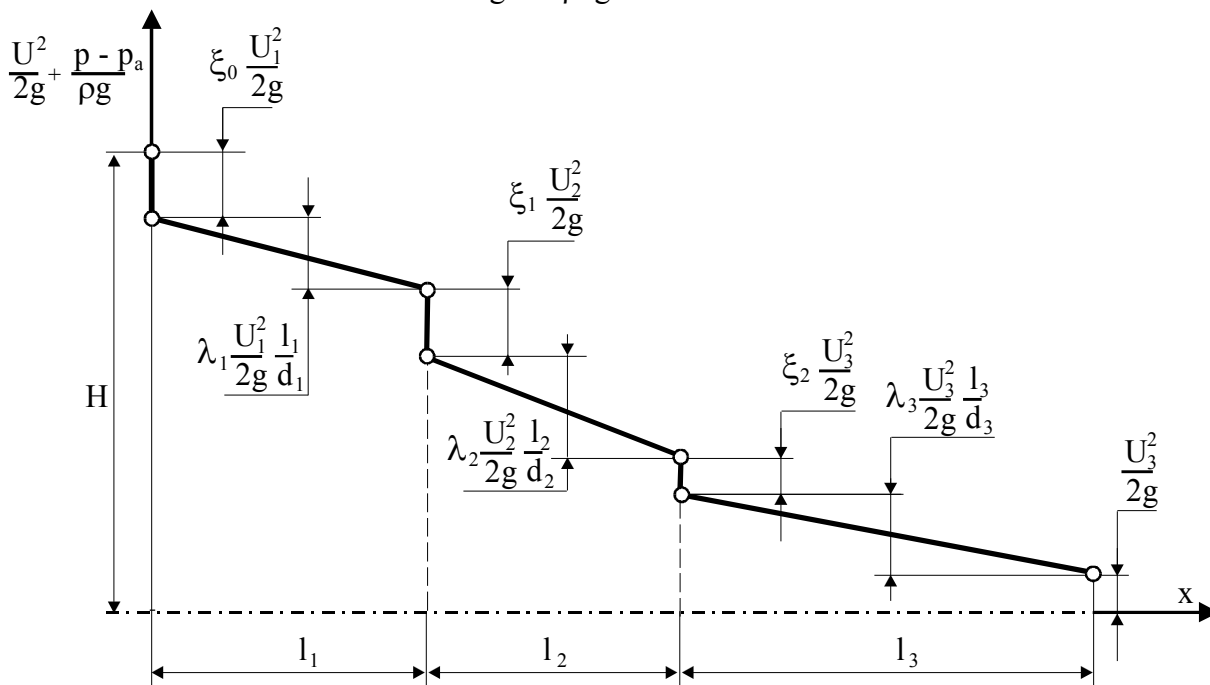
$$\lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{U_3^2}{2g} \quad (7.28)$$

a ponieważ na wylocie z rurociągu panuje ciśnienie otoczenia p_a , stąd też linia piezometryczna opada aż do osi rurociągu, która w naszym przypadku została przyjęta jako poziom odniesienia.

Linia piezometryczna ma oczywistą interpretację fizyczną, gdyż wyznacza ona rzeczywisty poziom cieczy odpowiadający ciśnieniu statycznemu panującemu w rurociągu. Linia ta nie tylko ilustruje przebieg procesów zachodzących w przepływie cieczy lepkiej przez rurociąg, lecz może mieć także ważne zastosowanie praktyczne. Jeżeli przedmiotem naszej analizy będzie np. wodociąg, wówczas linia piezometryczna wyznaczać będzie maksymalną wysokość do jakiej docierać będzie woda tłoczona tymże rurociągiem. Ograniczeniem linii piezometrycznej jest natomiast brak rozróżnienia przemian odwracalnych (w których energia przekształcana jest bez strat – przynajmniej dla płynu idealnego) i nieodwracalnych, stanowiących rzeczywiste straty energii. Przykładem przemian odwracalnych są procesy opisane zależnościami (7.20), (7.23) i (7.26), w których energia przechodzi z jednej formy w drugą bez strat. Projektant rurociągu powinien dążyć do eliminacji przemian nieodwracalnych, stanowiących rzeczywiste źródło strat a linia

piezometryczna nie jest tutaj dobrym narzędziem analizy. Z tego też powodu w analizie procesów zachodzących przy przepływie cieczy rzeczywistej stosujemy równolegle analizę tzw. *linii energii*, która przedstawia zmienność sumy energii kinetycznej i potencjalnej ciśnienia wzdłuż osi rurociągu stanowiącej poziom odniesienia, co ująć można następującą zależnością:

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p - p_a}{\rho \cdot g} = f(x)$$



Rys.7.11. Linia energii w przepływie cieczy lepkiej przez instalację z rys. 7.10.

Zmienność linii energii dla rurociągu z rys. 7.10 która pokazana jest na rys. 7.11 ujmuje tylko przemiany nieodwracalne spowodowane stratami lokalnymi, które ujęte są kolejno zależnościami (7.21), (7.24), (7.27) oraz stratami na tarcie opisanymi wz. (7.22), (7.25) i (7.28). Na rys. 7.11 pojawia się natomiast tzw. *strata wylotowa* równa:

$$\frac{U_3^2}{2g} \quad (7.29)$$

która przedstawia stratę energii kinetycznej na wylocie z rurociągu, przy czym warto zauważyć, że ta część traconej energii nie była uwidoczniona na wykresie z rys. 7.10. Zmniejszenie straty wylotowej jest oczywistym zyskiem energetycznym i w tym celu zastosować można tzw. dyfuzor wylotowy.

Reasumując, analiza przemian energetycznych zachodzących przy przepływie płynu rzeczywistego przez rurociągi wykonana przy pomocy linii piezometrycznej i linii energii umożliwia zarówno ocenę poprawności projektu jak również minimalizację strat energii zachodzących na skutek nieodwracalności przemian.

7.5. Przepływy przez przewody o niekołowym przekroju poprzecznym.

Dotychczas przeprowadzona analiza dotyczyła przepływów przez rury o kołowym przekroju poprzecznym, co uzasadnione jest zresztą najszerszym ich stosowaniem w praktyce. Straty energii wskutek lepkości płynu są w przepływie przez rurociągi wywołane tarciami o ściany i z tego powodu najkorzystniejszymi są przewody kołowe, które przy zadanym polu przekroju charakteryzują się najmniejszym obwodem a więc i najmniejszą powierzchnią ścian. W niektórych zastosowaniach (np. w wentylacji) koniecznym jest

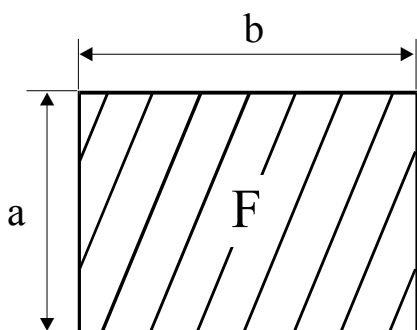
stosowanie przewodów o innych niż kołowe przekrojach poprzecznych i wówczas powstaje konieczność określenia współczynników tarcia dla takich przewodów.

Zajmijmy się w pierwszej kolejności współczynnikami strat tarcia, które w sposób oczywisty zależą od stosunku pola powierzchni ścian, decydującego o wielkości sił tarcia do pola przekroju poprzecznego, który określa wydatek transportowanego płynu. W przepływie cieczy przez przewody nie zawsze cały przekrój poprzeczny musi być wypełniony płynem i dlatego też wprowadzić tu należy pojęcie powierzchni zwilżonej, tzn. tej, która ma bezpośredni kontakt z płynem. Najwygodniej jest tu operować wielkościami odniesionymi do przekroju poprzecznego i dlatego też w mechanice płynów wprowadzono pojęcie *promienia hydraulicznego* definiowanego jako iloraz pola przekroju poprzecznego przewodu S do obwodu zwilżonego L_z , co zapisać można:

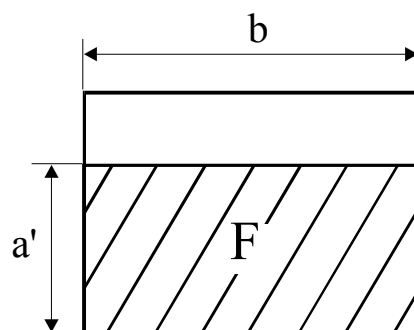
$$r_h = \frac{S}{L_z} \quad (8.1)$$

gdzie r_h jest promieniem hydraulicznym.

a)



b)



Rys.8.1. Sposób obliczania obwodu zwilżonego dla przewodu wypełnionego całkowicie a) i częściowo b) płynem.

Sposób obliczania promienia hydraulicznego zilustrowano na rys. 8.1, skąd wynika, że dla przypadku z rys. 8.1a wynosi on:

$$r_h = \frac{a \cdot b}{2(a + b)}$$

natomiast dla kanału wypełnionego częściowo (rys. 8.1b) promień hydrauliczny jest równy:

$$r_h = \frac{a' \cdot b}{2a' + b}$$

Intuicyjnie można oczekiwać, że charakterystycznym wymiarem liniowym dla kanałów o niekołowym przekroju poprzecznym winna być podwojona wartość promienia hydraulicznego, gdyż dla przewodów kołowych wymiarem charakterystycznym jest przecież średnica. Jednak zastosowanie wz. (8.1) dla przewodu kołowego wypełnionego całkowicie płynem daje wynik:

$$r_h = \frac{\pi d^2}{4 \pi d} = \frac{d}{4}$$

który sugeruje, że wymiarem charakterystycznym jest *czterokrotna długość promienia hydraulicznego*. Jeżeli zatem liczbą podobieństwa dla zjawisk oporu tarcia jest liczba Reynoldsa (patrz wykres Nikuradse i wzory empiryczne) oznacza to, że wartość współczynnika tarcia λ obliczona z wzorów empirycznych, lub odczytana z wykresu dla liczby Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{U \cdot 4r_h}{\nu} \quad (8.2)$$

winna dać nam w miarę dokładne oszacowanie wartości strat:

$$h_{\text{str}} = \lambda \cdot \frac{1}{4r_h} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (8.3)$$

Korzystając z wzorów empirycznych podstawiamy wartość liczby Reynoldsa obliczoną ze wz. (8.2) oraz jako *zastępczą średnicę kanału*:

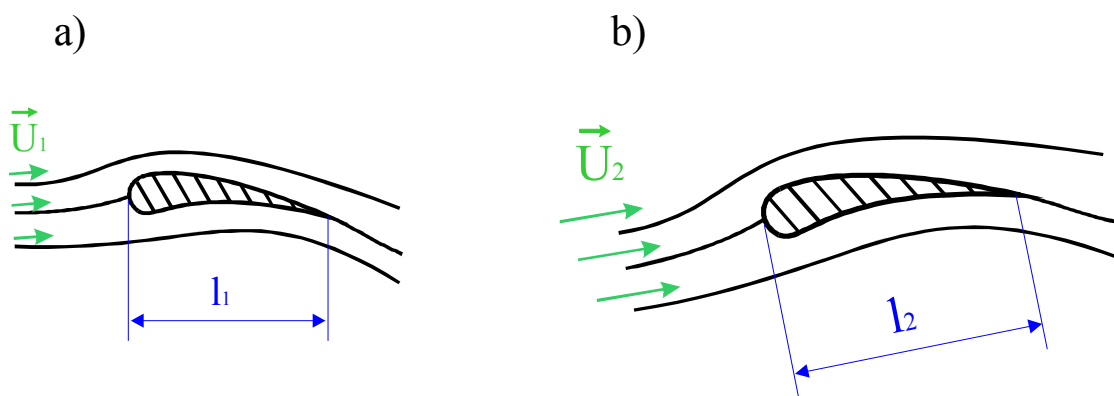
$$d_h = 4r_h \quad (8.4)$$

która nazywana jest często *średnicą hydrauliczną*.

Metodyka powyższa nie może być jednak stosowana do wyznaczania współczynników strat lokalnych ξ , które muszą być wyznaczone z wcześniejszych badań doświadczalnych. Poradniki projektantów instalacji hydraulicznych wentylacyjnych czy pneumatycznych podają jednak z reguły bogate zestawy danych empirycznych, z których zaczerpnąć można potrzebne informacje.

8. Kryteria podobieństwa przepływów.

Analiza podobieństwa jest jednym z najczęściej stosowanych narzędzi w mechanice płynów i w rozdziałach poprzednich wielokrotnie używaliśmy tej metody, chociaż nie wprowadziliśmy jeszcze tego pojęcia. Przykładowo, wykresy współczynników strat tarcia i strat lokalnych sporządziliśmy w funkcji liczby Reynoldsa, przyjmując intuicyjnie, że wartość Re a nie U uzasadnia przyjęcie do obliczeń danej wartości λ lub ξ . Najważniejszym powodem stosowania analizy podobieństwa jest złożoności opisu ruchu płynu i duży nakład obliczeń numerycznych potrzebnych do rozwiązania równań N-S czy też Eulera. Podobnie pracochłonny i kosztowny jest w mechanice płynów eksperyment i stąd też celowym jest stosowanie metod analizy, pozwalających przenosić uzyskane numerycznie lub eksperymentalnie rozwiązania na inne przypadki, jeżeli tylko spełnione będą kryteria podobieństwa tych przepływów. Przykładowo, założmy że znamy rozwiązanie opisujące pole prędkości wokół profilu aerodynamicznego o charakterystycznej skali liniowej l_1 , który opływany jest strumieniem płynu o charakterystycznej prędkości napływu U_1 , jak pokazano na rys. 8.1a.



Rys. 8.1. Przepływ dla którego znane jest rozwiązanie a) i przepływ podobny b) dla którego poszukujemy sposobu przeniesienia rozwiązania.

Wiedząc, że przepływ z rys. 8.1b charakteryzuje się skalą liniową l_2 i opływany jest z prędkością U_2 interesuje nas, czy możliwe jest przeniesienie znanego rozwiązania na ten przypadek i w jaki sposób należy dokonać przeskalowania istniejącego rozwiązania. Zagadnienie to jest właśnie przedmiotem analizy podobieństwa.

8.1. Klasyfikacja kryteriów podobieństwa.

Analiza podobieństwa przepływów oparta jest o kryteria, których spełnienie powoduje, że rozwiązanie z jednego przypadku może być w odpowiedni sposób przeniesione na inny przypadek. Rozwiązaniem może być kształt linii prądu (pole przepływu) a także współczynnik oporu opływanego ciała, czy też współczynnik straty lokalnej zaworu. Traktując dwa przepływy jako dwa pola fizyczne będziemy mogli zastosować *kryteria podobieństwa mechanicznego zakładające, że jeżeli w każdej odpowiadającej sobie parze punktów dwóch pól fizycznych, stosunki charakteryzujących je jednorodnych wielkości fizycznych będą jednakowe, wówczas pola te będą podobne.*

Podstawowymi jednostkami fizycznymi wykorzystywanymi w analizie podobieństwa są długość, czas i siła a stosunki tych wielkości są ilorazami podobieństwa tychże wielkości.

Najprostszym rodzajem podobieństwa jest *podobieństwo geometryczne* zakładające, że między dwoma polami fizycznymi spełniony jest warunek stałości odpowiadających sobie wymiarów liniowych:

$$\frac{l_1}{l_2} = \text{idem} \quad (8.1)$$

gdzie l_1 i l_2 są charakterystycznymi wymiarami obydwu pól fizycznych.

Bardziej zaawansowanym rodzajem podobieństwa mechanicznego jest *podobieństwo kinematyczne* które wymaga, aby oprócz warunku (8.1) spełniony był też wymóg stałości ilorazów charakterystycznych czasów:

$$\frac{t_1}{t_2} = \text{idem} \quad (8.2)$$

Podobieństwo kinematyczne zakłada zatem, że w obydwu przepływach elementy płynu w odpowiadających sobie punktach przebywają odcinki podobnych geometrycznie dróg S_1 i S_2 w czasach t_1 i t_2 , które spełniają warunek (9.2).

Z warunku podobieństwa kinematycznego wynika związek:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1 t_1}{U_2 t_2} = \frac{l_1}{l_2} = \text{idem}$$

który po przekształceniu daje warunek:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{l_1 t_2}{l_2 t_1} = \text{idem}$$

wykazujący, że *podobieństwo kinematyczne jest podobieństwem pól prędkości*.

Najważniejszym rodzajem podobieństwa mechanicznego jest *podobieństwo dynamiczne* wymagające aby w odpowiadających sobie punktach dwóch przepływów podobnych kinematycznie, odbywających się w konfiguracjach podobnych geometrycznie spełnione były warunki stałości ilorazów podobieństwa wartości sił działających na elementy płynu przy zachowaniu identyczności kierunków działania odpowiadających sobie sił. Jeżeli zatem dwa przepływy mają być podobne dynamicznie, wówczas wieloboki sił działających na odpowiadające sobie elementy płynu muszą być podobne. Oznacza to z kolei, że ilorazy odpowiednich sił składowych muszą być identyczne i jednakowe muszą być kierunki działania tych sił.

8.2. Bezwymiarowe równanie ruchu.

Jak wynika z analizy przeprowadzonej w rozdz. 3, w przepływach płynu rzeczywistego występuje pięć rodzajów sił, które w dalszej części rozważań oznaczać będziemy następująco:

- siły bezwładności B
- siły ciężkości G
- siły ciśnieniowe P
- siły lepkości L
- siły ściśliwości S.

Równania ruchu zgodnie z prawem Newtona wyrażają następujący warunek równowagi:

$$\sum (\text{wszystkich sił}) = 0$$

który musi być spełniony w każdym z punktów przepływu. Jeżeli rozważać będziemy dwa przepływy oznaczone odpowiednio 1 i 2, wówczas w każdym z punktów przepływu 1 spełniony będzie warunek:

$$B_1 + G_1 + P_1 + L_1 + S_1 = 0$$

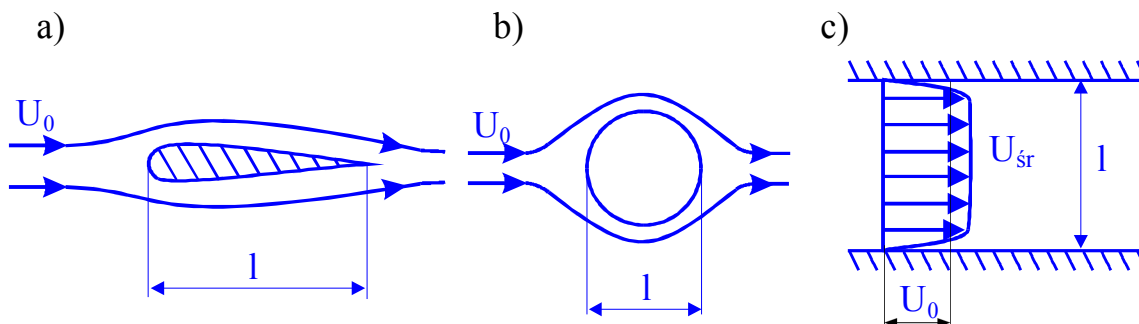
i podobnie w przepływie 2:

$$B_2 + G_2 + P_2 + L_2 + S_2 = 0$$

W każdej odpowiadającej sobie parze punktów obydwu przepływów podobnych dynamicznie spełniona być musi następująca relacja:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (8.3)$$

stanowiąca warunek całkowitego podobieństwa dynamicznego obydwu przepływów. Jeżeli między tymi przepływami ma być spełniony związek (8.3), wówczas nasuwa się wniosek, że rozwiązanie równania ruchu winno być wyrażone w taki sposób, aby przez jego odpowiednie przeskalowanie możliwe było uzyskanie rozwiązań dla wszystkich dynamicznie podobnych przepływów. Najprostszym sposobem uzyskania takiego rozwiązania jest przekształcenie równania ruchu do postaci bezwymiarowej, w której wszystkie wielkości fizyczne będą odniesione do charakterystycznych wymiarów.



Rys. 8.2. Przykłady charakterystycznych skal dla wybranych przepływów.

Na rys. 8.2 pokazano przykłady przepływów z zaznaczonymi charakterystycznymi wymiarami liniowymi l i charakterystycznymi prędkościami U_0 , które nazywamy *skalami przepływu*. Dla opływu profilu aerodynamicznego (rys. 8.2a) charakterystyczną skalą liniową jest cięciwa profilu a dla opływu kolumny (rys. 8.2b) jej średnica. W obydwu przypadkach charakterystyczną skalą prędkości U_0 jest prędkość przepływu niezakłóconego, określona w miejscu, gdzie linie prądu nie są zdeformowane obecnością opływającego ciała. W przepływie płynu rzeczywistego w kanale (rys. 8.2c) charakterystyczną skalą prędkości jest prędkość średnia, natomiast skalą liniową jest średnica kanału.

Jeżeli przyjmiemy następujące skale:

- dla czasu t_0
- dla wymiarów liniowych l
- dla prędkości U_0

wówczas zmienne występujące w równaniach ruchu będziemy mogli przekształcić do następującej postaci bezwymiarowej:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l} ; \quad \eta = \frac{y}{l} ; \quad \zeta = \frac{z}{l} \\ \bar{U}_x &= \frac{U_x}{U_0} ; \quad \bar{U}_y = \frac{U_y}{U_0} ; \quad \bar{U}_z = \frac{U_z}{U_0} \\ \left| \vec{\bar{U}} \right| &= \frac{\left| \vec{U} \right|}{U_0} \\ \bar{p} &= \frac{p}{p_0} ; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \quad \tau = \frac{t}{t_0} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Podstawienie bezwymiarowych zmiennych do równania N-S dla kierunku x daje:

$$\begin{aligned} & \frac{U_0}{t_0} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \tau} + \frac{U_0^2}{l} \left(\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \xi} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \eta} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \zeta} \right) = \\ & = g \frac{X}{g} - \frac{p_0}{l \rho_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{v U_0}{l} \nabla^2 \bar{U}_x + \frac{v}{3} \frac{U_0}{l^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\text{div } \vec{U} \right) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \text{div} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

Po pomnożeniu obydwu stron równania przez

$$\frac{U_0^2}{l}$$

i wykonaniu identycznych przekształceń dla kierunków Y oraz Z otrzymujemy bezwymiarowe równanie N-S w postaci wektorowej:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_0 t_0} \frac{d\vec{U}}{d\tau} &= \frac{gl}{U_0^2} \frac{\vec{F}}{g} - \frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{1}{\rho} \text{grad}(\bar{p}) + \\ &+ \frac{v}{l U_0} \nabla^2 \vec{U} + \frac{v}{3 l U_0} \text{grad} \left(\text{div } \vec{U} \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Dla podobieństwa dynamicznego przepływów wystarczy identyczność współczynników przy odpowiednich członach równania, co daje następujące liczby podobieństwa:

$$\frac{1}{U_0 t_0} = \frac{1}{St} ; \quad St - \text{liczba Strouhala} \quad (8.6)$$

$$\frac{gl}{U_0^2} = \frac{1}{Fr} ; \quad Fr - \text{liczba Froude'a} \quad (8.7)$$

$$\frac{p_0}{\rho_0 U_0^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{M^2} ; \quad M - \text{liczba Macha} \quad (8.8)$$

$$\frac{v}{l U_0} = \frac{1}{Re} ; \quad Re - \text{liczba Reynoldsa} \quad (8.9)$$

Jeżeli w przepływie 1 występować będą następujące wielkości charakterystyczne:

$$U_{01} ; l_1 ; t_{01} ; g ; p_{01} ; \rho_{01} ; v_1$$

a w przepływie 2 będą one równe:

$$U_{02} ; l_2 ; t_{02} ; g ; p_{02} ; \rho_{02} ; v_2$$

wówczas warunki podobieństwa dynamicznego obydwu tych przepływów będą następujące:

$$\frac{l_1}{U_{01} t_{01}} = \frac{l_2}{U_{02} t_{02}} = \frac{1}{St}$$

$$\frac{gl_1}{U_{01}^2} = \frac{gl_2}{U_{02}^2} = \frac{1}{Fr}$$

$$\frac{p_{01}}{\rho_{01} U_{01}^2} = \frac{p_{02}}{\rho_{02} U_{02}^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{M^2}$$

$$\frac{v_1}{l_1 U_{01}} = \frac{v_2}{l_2 U_{02}} = \frac{1}{Re}$$

W praktyce niemożliwe jest jednoczesne spełnienie wszystkich tych warunków i zmuszeni jesteśmy ograniczyć się do korzystania z *podobieństwa częściowego*. Należy wówczas wybrać

z kryteriów danych wz. (8.6) ÷ (8.9) ten warunek, który dotyczy najbardziej istotnej siły występującej w przepływie. Konieczna jest tu jednak wiedza dotycząca interpretacji liczb podobieństwa i zagadnienie to zostanie omówione w rozdziale następnym.

8.3. Sens fizyczny liczb podobieństwa.

Zastosujmy analizę wymiarową dla zjawisk tarcia zachodzących przy przepływie płynu wzdłuż ściany. Elementarna siła lepkości wynosi:

$$dL = \tau dS \quad (8.10)$$

a poszczególne człony aproksymowane być mogą następująco:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial n} \sim \mu \frac{dU}{dl} \quad (8.11)$$

$$S \sim dl^2$$

gdzie dl - jest elementarnym wymiarem liniowym.

Podstawienie zal. (8.11) do wz. (8.10) daje następujący wynik analizy wymiarowej:

$$dL \sim \mu dU dl$$

a po sformułowaniu tej zależności dla elementu płynu o wymiarach skończonych:

$$dL \sim \mu U l \quad (8.12)$$

Elementarna siła bezwładności zapisana być może jako:

$$dB = dm \cdot a$$

gdzie:

$$dm \cong \rho dl^3$$

$$a \cong \frac{dU}{dt}$$

a po przejściu do elementu płynu o wymiarach skończonych:

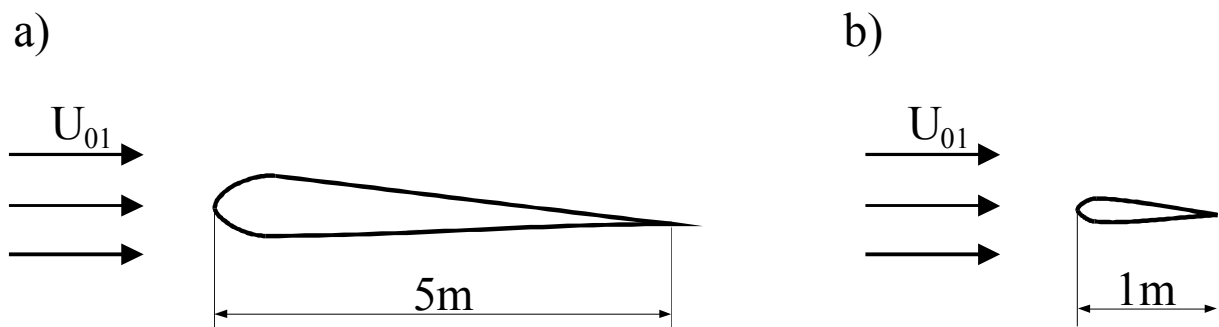
$$dB \sim \rho U^2 l^2 \quad (8.13)$$

Uwzględniając wynik powyższej analizy, liczba Reynoldsa dana wz. (8.9) zapisana być może jako:

$$Re = \frac{dB}{dL} = \frac{U \cdot l}{\nu}$$

co oznacza, że liczba Reynoldsa jest ilorazem siły bezwładności i lepkości stanowiąc kryterium podobieństwa w przepływach, gdzie te dwie siły są dominujące. Stwierdzenie to zilustrujemy na przykładzie badań modelowych pokazanych na rys. 8.3, gdzie obiektem rzeczywistym jest profil skrzydła samolotu o cięciwie wynoszącej (rys. 8.3a):

$$l = 5 \text{ [m]}$$



Rys. 8.3. Geometria profilu rzeczywistego a) i jego modelu b).

Jeżeli samolot porusza się z prędkością:

$$U = 850 \text{ [km/h]} = 236 \text{ [m/s]}$$

w powietrzu, którego lepkość wynosi:

$$\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^2/\text{s]}$$

wówczas liczba Reynoldsa wynosi:

$$\text{Re}_1 = 7.9 \cdot 10^7$$

Jeżeli model takiego skrzydła o cięciwie (rys. 9.3b) wynoszącej:

$$l_2 = 1 \text{ [m]}$$

będziemy badać w tunelu aerodynamicznym, wówczas dla zachowania podobieństwa sił oporu (czyli tarcia) konieczne będzie zachowanie identyczności liczby Reynoldsa, tzn.:

$$\text{Re}_2 = \frac{U_2 \cdot l_2}{\nu} = \text{Re}_1$$

skąd otrzymamy:

$$U_2 = 1180 \text{ [m/s]}$$

Oznacza to, że prędkość przepływu w tunelu będzie kilkakrotnie przekraczać prędkość dźwięku i wyniki takich badań będą całkowicie niewiarygodne. Należy zatem przeprowadzić te badania w płynie, którego lepkość byłaby dobrana tak, aby zapewnić żadaną wartość liczby Reynoldsa bez przekraczania prędkości dźwięku.

Dla zilustrowania sensu fizycznego kolejnej liczby podobieństwa zapiszmy elementarną siłę ciężkości:

$$dG = dm \cdot g \sim \rho dl^3 \cdot g$$

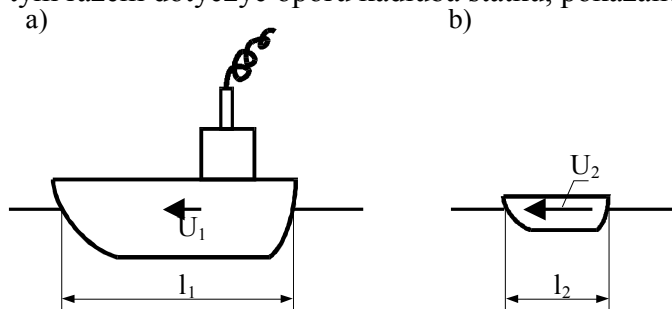
która dla elementu płynu o wymiarach skończonych będzie proporcjonalna do:

$$dG \sim \rho \cdot g \cdot l^3 \quad (8.14)$$

Liczbę Froude'a zapisaną wz. (8.7) przedstawić możemy następująco:

$$\text{Fr} = \frac{dG}{dB} = \frac{gl}{U^2}$$

co oznacza, że stanowiąc ona będzie kryterium podobieństwa dla zjawisk, w których rolę decydującą odgrywają siły ciężkości i bezwładności. Załóżmy, że badania modelowe będą tym razem dotyczyć oporu kadłuba statku, pokazanego na rys. 8.4.



Rys. 8.4. Geometria statku a) i jego modelu b).

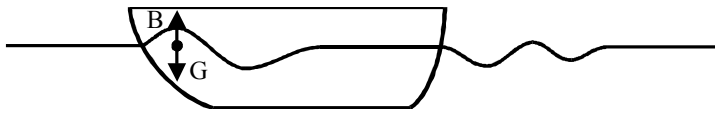
Dla prawidłowego modelowania oporu tarcia kadłuba konieczne będzie zachowanie równości liczb Reynoldsa:

$$\text{Re}_1 = \frac{U_1 l_1}{\nu} = \frac{U_2 l_2}{\nu} = \text{Re}_2$$

co zostało przedyskutowane w przykładzie poprzednim. W trakcie ruchu statku zachodzą jednak dodatkowe opory, których mechanizm powstawania pokazano na rys. 8.5. Poruszający się kadłub przyspiesza wodę, która na skutek działania sił bezwładności unosi się ku górze, pokonując działanie sił ciężkości. Oznacza to, że dla zachowania podobieństwa oporu falowego konieczne jest zachowanie identyczności liczb Froude'a:

$$\text{Fr}_1 = \frac{U_1^2}{gl_1} = \frac{U_2^2}{gl_2} = \text{Fr}_2$$

Prawidłowe zamodelowanie obydwu składowych oporu wymagałoby zatem przeprowadzenia dwóch eksperymentów, w których należałoby zachować identyczność liczb Reynoldsa (opór tarcia) i Froude'a (opór falowy).



Rys. 8.5. Mechanizm powstawania oporu falowego.

Interpretacja liczby Macha:

$$\frac{p}{\rho U^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{M^2}$$

wymaga wprowadzenia pojęcia prędkości dźwięku równej:

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

co pozwala zapisać:

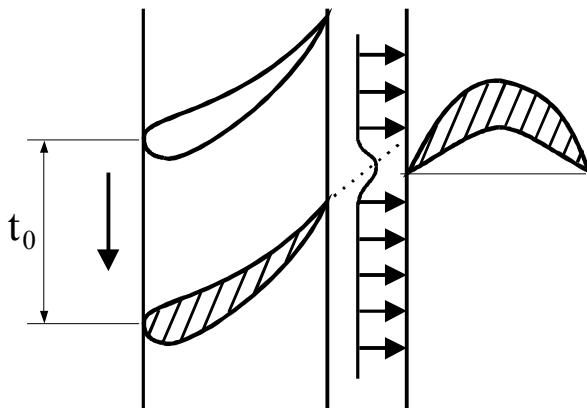
$$M = \frac{U}{a} \quad (8.15)$$

co oznacza, że liczba Macha jest ilorazem prędkości przepływu i prędkości dźwięku. Będzie to zatem liczba podobieństwa dla przepływów, w których istotną rolę odgrywają zjawiska ściśliwości (przepływy okołodźwiękowe i naddźwiękowe).

Liczba Strouhala dana związkiem:

$$St = \frac{U_o t_o}{l} \quad (8.16)$$

jest kryterium podobieństwa dla przepływów niestabilnych, w których przepływ zmienia się z czasem.



Rys. 8.6. Przepływ niestabilny w maszynie przepływowej.

Przykład takiego przepływu, pokazany na rys. 8.6 pokazuje, że ważnym parametrem jest tu okres zmian pola prędkości za okresowo przesuwającymi się łopatkami wirnikowymi. Dla przepływu takiego badania modelowe wymagać będą zachowania identyczności:

$$St_1 = St_2$$

i wówczas możemy oczekiwać, że wyniki otrzymane z eksperymentu modelowego będą wiernie odzwierciedlać charakterystyki obiektu rzeczywistego.

9. Wprowadzenie do teorii przepływów potencjalnych

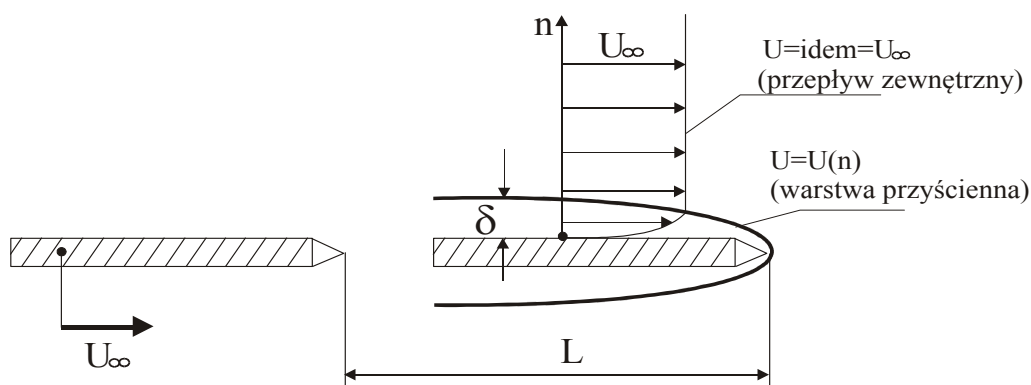
Złożoność matematyczna równania N-S sprawia, że do tej pory udało się je rozwiązać analitycznie jedynie w kilku szczególnie prostych przypadkach, z których jeden (prawo Hageda-Poiseuille'a) poznaliśmy w pierwszej części wykładu. Dla bardziej złożonych przepływów uzyskanie rozwiązania wymaga stosowania uproszczeń, z których najdalej idącym jest założenie *potencjalności*, które uzupełnione dodatkowymi założeniami upraszcza zagadnienie tak znacznie, że pozwala uzyskać rozwiązanie przy użyciu elementarnej algebry i trygonometrii. Powstała w ten sposób teoria *przepływów potencjalnych* była w pierwszej połowie XX wieku podstawowym narzędziem aerodynamiki lotniczej i spełniała tę rolę do czasu, gdy samoloty zaczęły latać z prędkościami przekraczającymi „magiczną” granicę $Ma \approx 0,3$ co w normalnych warunkach odpowiada prędkości

$$U \approx 100 \text{ [m/s]}$$

Istnieje jednak wiele dziedzin techniki, w których prędkości nie przekraczają prędkości 100 [m/s] jak np. przepływy występujące w technice wentylacyjnej, klimatyzacji czy też aerodynamice środowiska i w tych zastosowaniach teoria przepływów potencjalnych może dać użyteczne wyniki. Rozwój metod CFD sprawił jednak, że we wszystkich praktycznie dziedzinach zastosowań teoria przepływów potencjalnych została zastąpiona bardziej zaawansowanymi technikami obliczeń, oferującymi znacznie większą dokładność uzyskiwanych rozwiązań. Przepływy potencjalne dzięki prostocie aparatu matematycznego są jednak także i dziś niezastąpionymi metodami dydaktycznymi, pozwalającymi w łatwy sposób prześledzić drogę dochodzenia do rozwiązania i wykształcić w ten sposób inżynierską intuicję. Dodatkowo, są one niezastąpionym narzędziem analizy wstępnej (przybliżonej) pozwalając uzyskać jakościowo poprawne rozwiązanie przy użyciu minimalnej ilości obliczeń, do których wystarczy znajomość elementarnych funkcji algebraicznych i trygonometrycznych. Z tego też powodu zawartość niniejszego rozdziału ograniczono do zagadnień najprostszych, niezbędnych do zrozumienia fizyki podstawowych typów przepływu.

9.1. Podstawowe pojęcia i zastosowane uproszczenia

Wszystkie płyny są lepkie, lecz w wielu zastosowaniach praktycznych możliwe jest pominięcie wpływu lepkości. Rozważmy dla przykładu płaską płytę, która ze stanu spoczynku zostaje w sposób impulsowy (prędkość od zera do danej wartości stałej U_∞ narasta w nieskończenie krótkim czasie) przesunięta o dystans L (patrz rys. 9.1).



Rys.9.1. Rozwój pola prędkości wokół impulsowo przemieszczonej płaskiej płyty.

Wzdłuż ściany tejże płyty powstaje wówczas warstwa przyścienna, której grubość można wyliczyć z równania dyfuzji (Sabersky i in.) w następujący sposób:

$$\delta \approx 4\sqrt{\nu t} \quad (9.1)$$

gdzie ν - jest lepkością kinematyczną a t czasem trwania ruchu.

Jeżeli czas t wyrazimy przez odległość przesunięcia płyty otrzymamy związek

$$\delta \approx 4\sqrt{\frac{2L}{U_\infty}} \quad (9.2)$$

w którym U_∞ jest prędkością ruchu płyty. Związek ten można doprowadzić do następującej zależności bezwymiarowej:

$$\frac{\delta}{L} \approx 4\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \equiv 4\sqrt{\frac{1}{Re}} \quad (9.3)$$

z której wynika, że wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa maleje względna grubość warstwy, tzn.:

$$Re \uparrow \quad (\delta/L) \downarrow \quad (9.4)$$

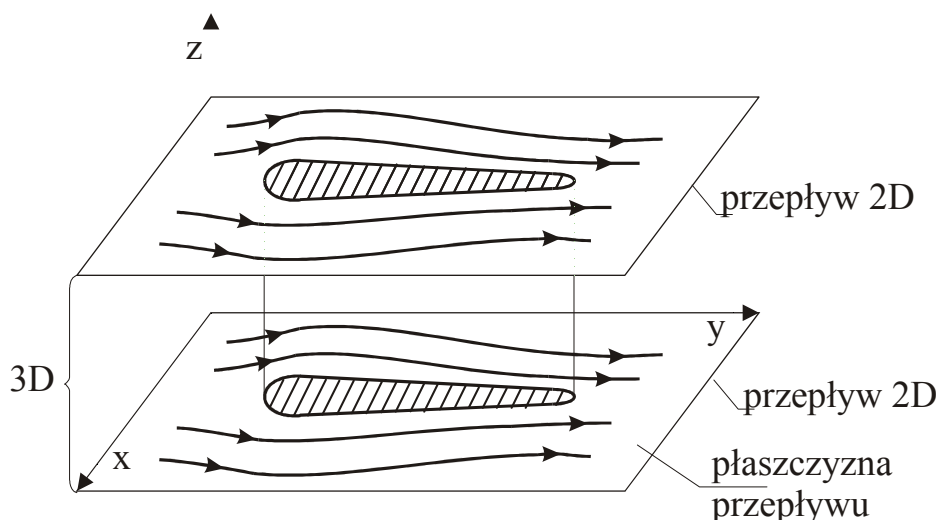
Oznacza to, że dla dużych wartości Re wpływ lepkości jest ograniczony do cienkiej warstwy płynu o grubości δ bezpośrednio przylegającej do ściany. Poza tą warstwę ($y > \delta$ - patrz rys. 9.1) gdzie nie występuje gradient prędkości w kierunku normalnym do ściany, przepływ uważany być może za nielepki.

W typowych zastosowaniach technicznych liczby Reynoldsa charakteryzujące przepływ są zazwyczaj bardzo duże, czego przykładem może być przepływ w kanałach łopatkowych turbin, dla którego typowa wartość wynosi

$$Re \approx 10^6$$

Biorąc pod uwagę zal. 1.4 możemy zatem stwierdzić, że dla tak dużych liczb Re grubość δ warstwy przyściennej zdominowanej przez efekty lepkości jest zazwyczaj bardzo mała w porównaniu z wymiarem wzdłużnym przepływu oznaczonym na rys. 1.1 jako L . Dlatego też w niektórych zastosowaniach możliwe jest przyjęcie istotnego uproszczenia pozwalającego na pominięcie lepkości płynu. Przyjmijmy dodatkowo, że prędkość przepływu ograniczona jest do zakresu: $M < 0,3$ lub $U < 100 \text{ m/s}$ i w takich przypadkach możemy użyć znacznie uproszczonego opisu ruchu płynu, w którym zamiast równań N-S wystarczy użycie równań Eulera, do czego przejdziemy w dalszej części wykładu. Należy jednak pamiętać, że analizowany przez nas przypadek dotyczy przepływu o stałej prędkości i w całej analizie przepływów potencjalnych rozpatrywać będziemy wyłącznie *ruch ustalony*.

Drugie z możliwych uproszczeń dotyczy dwuwymiarowego (2D) charakteru przepływu, w którym trajektorie wszystkich elementów płynu są równoległe do pewnej płaszczyzny nazywanej *płaszczyzną przepływu* (patrz rys. 9.2).



Rys.9.2. Przepływ płaski wokół ciała o kształcie opływowym

Przepływ taki jest w istocie trójwymiarowy (3D), lecz jest on identyczny we wszystkich płaszczyznach i wystarczy zatem jego opis w jednej zaledwie płaszczyźnie.

W przepływie spełniającym warunek dwuwymiarowości, pole prędkości które w ogólnym przypadku opisane jest związkiem:

$$\vec{U}(x, y, z) = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$$

spełnia następujące warunki:

$$U_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (9.5)$$

W dalszej części wykładu będziemy zatem mieli do czynienia z przepływem w płaszczyźnie xy , którego pole prędkości opisać można:

$$\vec{U}(x, y) = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} \quad (9.5.a)$$

a obrazy przepływu w pozostałych płaszczyznach prostopadłych do osi z będą identyczne.

9.2. Potencjał prędkości

Trzecie ważne uproszczenie przyjmowane w analizie przepływów potencjalnych dotyczy bezwirowości przepływu, zgodnie z którym wszystkie elementy płynu nie mogą obracać się względem swoich środków ciężkości. Oznacza to, że wszystkie składowe prędkości wirowania spełniają związek:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (9.6)$$

Powyższa analiza będzie bardziej przekonująca, jeżeli wprowadzimy pojęcie wektora wirowości (rotacji) o postaci

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k} = \text{curl} U = \nabla U$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 2\omega_x = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \\ \Omega_y &= 2\omega_y = \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \Omega_z &= 2\omega_z = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (9.6.a)$$

Dwie z powyższych składowych wektora wirowości muszą być równe zero dla przepływu 2D:

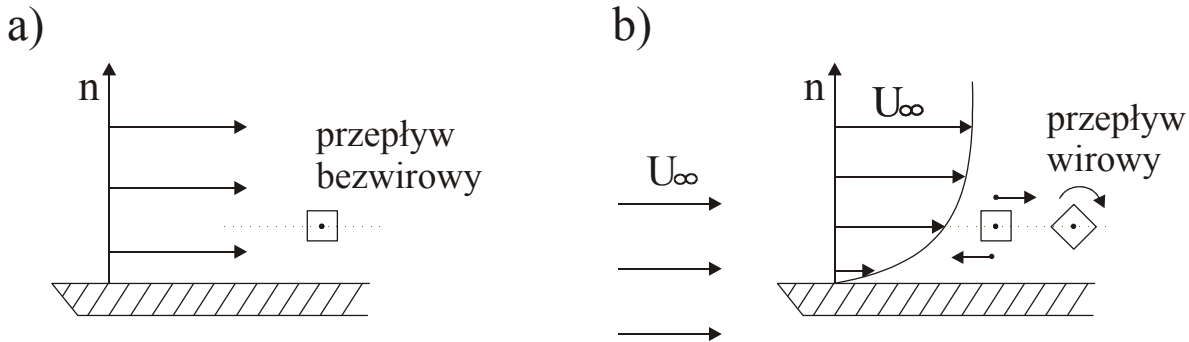
$$\Omega_x = \Omega_y = 0$$

ponieważ zgodnie ze wz. (9.5) albo $U_z = 0$ lub $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Dla spełnienia warunku (9.6)

wystarczy zatem założenie

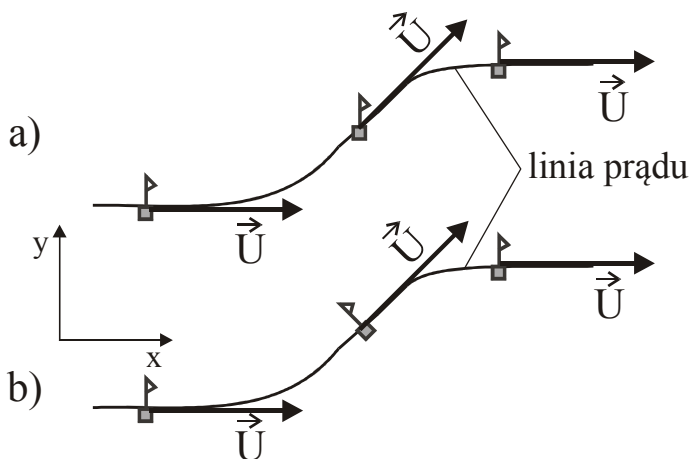
$$\Omega_z = 0 \quad (9.7)$$

które wymaga, aby elementy płynu w trakcie ruchu wzdłuż swoich trajektorii nie mogły obracać się względem swoich środków masy, tzn. że jedynie ruch typu (a) jest dozwolony (patrz rys. 9.3). Rotacja elementów płynu w przepływie płynu rzeczywistego jest najczęściej spowodowana lepkością, co pokazano na rys. 9.3.



Rys.9.3. Bezwirowy (a) i wirowy (b) ruch elementu płynu wzdłuż trajektorii.

W przepływie płynu idealnego (nielepkiego) obecność ściany nie zakłóca pola prędkości, i prędkość jest zatem jednakowa na górnej i dolnej ścianie zaznaczonego na rysunku (9.3a) elementu płynu. Element płynu nie obraca się wówczas wokół swego środka masy i ten rodzaj ruchu nazywać możemy bezwirowym. Lepkość płynu sprawia natomiast, że prędkość na nieruchomej ścianie spada do zera i w przepływie występuje gradient prędkości w kierunku normalnym do ściany. Na każdym elemencie płynu znajdującym się w takim przepływie gradientowym występują różnice prędkości na górnej i dolnej ścianie (rys. 9.3.b) powodujące obrót tego elementu wokół środka masy. Założenie upraszczające dane wz. (9.6) oraz (9.7) jest jednak uzasadnione fizycznie, gdyż jak pokazano w rozdz. 9.1 w przeważającym obszarze przepływu poza warstwami przyściennymi lepkość nie odgrywa istotnej roli. Przyjęcie założenia o bezwirowości przepływu oznacza, że tylko ten rodzaj ruchu, który pokazano na rys. 9.4.a jest dozwolony w przepływach potencjalnych. Mimo zatem, iż pokazane na rys. 9.4.b zachowanie elementu płynu w trakcie przemieszczania wzdłuż trajektorii wydaje się bardziej naturalne, to jednak płyn rzeczywisty w ruchu wzdłuż linii prądu tak się nie zachowuje a poza tym nie może to być ruch potencjalny. Wskaźnik położenia elementu płynu pokazuje bowiem, że wyróżniony na rys. 9.4.b element wykonuje w trakcie ruchu obrót wokół swego środka masy, co sprzeczne jest z przyjętym przez nas założeniem (9.7).



Rys.9.4. Ilustracja związku między wirowością pola prędkości i lepkością płynu.

Bezwirowość przepływu 2D jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia ciągłej, analitycznej funkcji

$$\varphi(x, y)$$

nazywanej *potencjałem prędkości*, która związana jest z polem prędkości zależnością:

$$\vec{U} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \quad (9.8)$$

co zapisać można jako:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ U_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.9)$$

Oznacza to, że wektor prędkości, który zgodnie z równ. (9.5.a) jest funkcją dwóch zmiennych U_x oraz U_y , może być teraz zapisany jako funkcja zaledwie jednej zmiennej, tzn.:

$$\vec{U}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$$

co w sposób niewątpliwy upraszcza dalszą analizę.

Potencjał prędkości jest funkcją skalarną opisującą pewne warunki, które spełnić musi przepływ w płaszczyźnie (x, y) , chociaż sama funkcja $\varphi(x, y)$ nie ma sensu fizycznego i przedstawia abstrakcyjne (choć użyteczne) pojęcie matematyczne.

Użyteczność tego pojęcia można wykazać analizując podstawowy warunek kinematyczny, który musi być spełniony przez pole przepływu, tzn. równanie ciągłości. Równanie to może być dla przepływu ustalonego płynu nieściśliwego zapisane w postaci:

$$\text{div } \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad (9.10)$$

Założenie nieściśliwości płynu oznacza w praktyce, że analiza przepływów potencjalnych jest właściwa dla opisu ruchu cieczy, które są nieściśliwe dla zakresów ciśnień i prędkości spotykanych w typowych zastosowaniach technicznych. W przypadku analizy przepływu gazów, ich prędkość musi być ograniczona do zakresu:

$$U < 100 \text{ m/s}$$

ponieważ w tym zakresie zmiana gęstości $\Delta \rho$ jest na tyle mała, aby spełniony był warunek $\Delta \rho / \rho < 1\%$, co oznacza, że spełniony jest wówczas warunek nieściśliwości.

Wprowadzenie (9.9) do równania ciągłości (9.10) daje:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (9.11)$$

Widzimy zatem, że bezwirowy przepływ płynu nieściśliwego może być opisany przez równanie Laplace'a dla potencjału prędkości φ i ta własność pola przepływu ma dalsze, istotne następstwa.

Po pierwsze, zamiast konieczności żmudnej analizy równania ciągłości, które w postaci (9.10) nie ma znanych rozwiązań analitycznych (i musi być rozwiązywane indywidualnie dla każdego przepływu) możemy użyć doskonale znanych rozwiązań równania Laplace'a. Po drugie, rozwiązaniem równania Laplace'a są funkcje harmoniczne, które są ciągłe i mogą zatem przedstawić linie stałych wartości potencjału prędkości. Warto również zauważyć, że warunek:

$$\text{grad } \varphi = 0$$

jest spełniony na każdej linii ekwipotencjalnej, co oznacza z kolei, że wektor prędkości musi być prostopadły do tej linii.

Najważniejszą jednak konsekwencją zw. (9.11) jest *liniowość* równania Laplace'a oznaczająca, że liniowe kombinacje rozwiązań są również rozwiązaniami tego równania. Dla przykładu, jeżeli dwie funkcje potencjału prędkości:

$$\varphi_1(x, y) \quad ; \quad \varphi_2(x, y)$$

spełniają (każda z osobna) równanie Laplace'a, to ich suma

$$\varphi = a \varphi_1 + b \varphi_2$$

gdzie a, b - stałe

jest również rozwiązaniem równania Laplace'a. Własność ta ma bardzo istotne konsekwencje, gdyż umożliwia uzyskiwanie rozwiązań dla złożonych przepływów poprzez ich dekompozycję na przepływy proste lub też tworzenie przepływów złożonych przez superpozycję przepływów prostych.

9.3. Funkcja prądu

Dwuwymiarowy przepływ potencjalny dla którego równanie ciągłości opisane jest równaniem Laplace'a (wz. 9.11) jest z założenia przepływem ustalonym, w którym trajektorie elementów płynu są tożsame z liniami prądu opisanymi następującymi równaniami różniczkowymi:

$$\frac{d x}{U_x} = \frac{d y}{U_y} \quad (9.12)$$

które można zapisać w postaci

$$-U_y d x + U_x d y = 0 \quad (9.12a)$$

Z równania ciągłości (wz. 9.10) otrzymujemy

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial (-U_y)}{\partial y}$$

co po podstawieniu do wz. (9.12a) prowadzi do następującej różniczki zupełnej pewnej funkcji $\psi(x, y)$ zachowującej stałą wysokość wzdłuż linii prądu, nazywanej *funkcją prądu*:

$$-U_y d x + U_x d y = d \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} d x + \frac{\partial \psi}{\partial y} d y \quad (9.13)$$

skąd otrzymujemy następujące warunki wiążące funkcję $\psi(x, y)$ ze składowymi wektora prędkości:

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

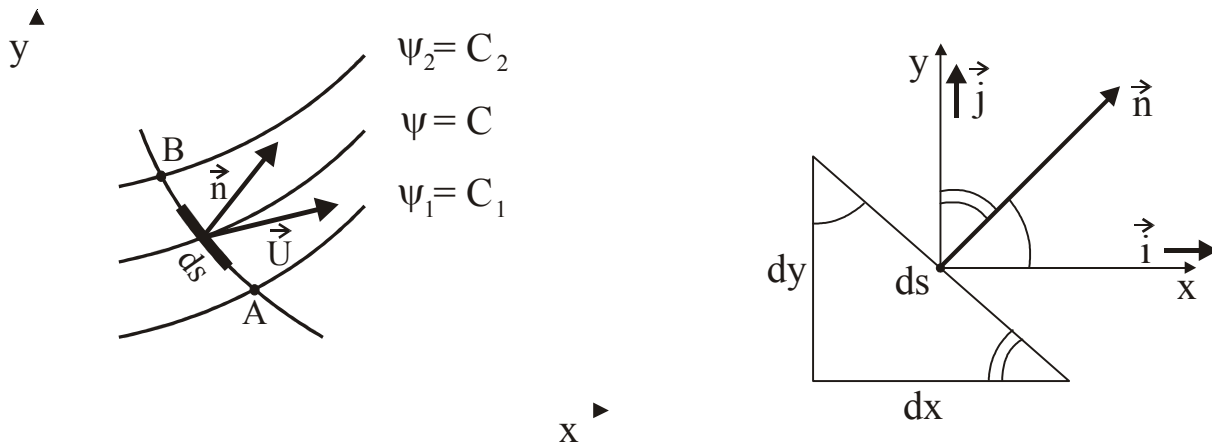
$$U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.14)$$

Wykorzystując powyższe zależności można wyrazić równanie różniczkowe linii prądu (zw. 9.12.a) w następującej postaci:

$$d \psi = 0$$

co potwierdza, że funkcja prądu $\psi(x, y)$ zachowuje stałą wartość wzdłuż linii prądu, tzn.:

$$\psi(x, y) = const$$



Rys.9.5. Rodzina linii prądu w przykładowym przepływie.

W przeciwieństwie do potencjału prędkości $\varphi(x, y)$, funkcja prądu $\psi(x, y)$ ma sens fizyczny w mechanice płynów, co zilustrowane zostanie na rys. 9.5, na którym przedstawiono dwie przykładowe linie prądu:

$$\psi = \psi_1 = C_1 \quad ; \quad \psi = \psi_2 = C_2$$

i dowolną linię prądu

$$\psi = C$$

zlokalizowaną pomiędzy dwiema określonymi wcześniej liniami prądu.

Wybermy dwa punkty A oraz B , które leżą na liniach prądu ψ_1 oraz ψ_2 oraz zaznaczmy odcinek ds położony na linii łączącej punkty A oraz B i zlokalizowany w ten sposób, że jego środek leży w punkcie w którym linia prądu $\psi = C$ przecina linię AB (patrz rys. 9.5).

Wektor \vec{n} prostopadły do linii prądu jest przyłożony w punkcie w którym linia prądu $\psi = C$ przecina linię AB a wektor prędkości \vec{U} styczny do linii $\psi = C$ transportuje elementarny wydatek dQ równy:

$$dQ = U_n ds \quad (9.15)$$

gdzie U_n jest składową wektora prędkości wzdłuż kierunku \vec{n} , przy czym moduł tej składowej może być obliczony z zależności:

$$U_n = U_x \cos(\vec{n}; \vec{i}) + U_y \cos(\vec{n}; \vec{j}) \quad (9.16)$$

Kosinusy kierunkowe, które wyliczyć można z następujących związków:

$$\cos(\vec{n}; \vec{i}) = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \cos(\vec{n}; \vec{j}) = -\frac{dx}{ds}$$

wprowadzone do zw. (1.15), po uwzględnieniu zal. (9.14) oraz (9.16) pozwalają obliczyć elementarne natężenie objętościowe przepływu przez odcinek ds w sposób następujący:

$$\begin{aligned} dQ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds = \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy = d\Psi \end{aligned}$$

Po scałkowaniu wzdłuż linii AB , wydatek płynu przepływającego przez powierzchnię o długości AB i jednostkowej wysokości (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny xy) można wyliczyć w następujący sposób:

$$Q = \int_{C_1}^{C_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (9.17)$$

Oznacza to, że funkcja prądu ma jasno określony sens fizyczny, ponieważ różnica wartości funkcji prądu ψ_1 oraz ψ_2 jest równa jednostkowemu wydatkowi transportowanemu pomiędzy liniami prądu $\psi_1 = C_1$ oraz $\psi_2 = C_2$.

Podsumowując rozważania dotyczące sensu fizycznego funkcji ψ można stwierdzić, że linie stałych wartości funkcji prądu są wszędzie równoległe do przepływu (lub ściślej styczne do wektorów prędkości) a różnica wartości liczbowych funkcji ψ między dwoma sąsiednimi liniami prądu jest równa wydatkowi płynu przepływającego między tymi dwoma liniami.

Kolejną interesującą właściwością funkcji ψ jest jej związek z rotacją pola prędkości, co wykazać można podstawiając zw. (9.14) do wz. (9.17):

$$\Omega_z = 2 \omega_z = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

co daje związek:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (9.18)$$

wykazujący, że także funkcja prądu spełnia równanie Laplace'a dla bezwrotnego, dwuwymiarowego płynu nieściśliwego.

Porównując związki (9.14) oraz (9.9) można zapisać, że dla każdej pary funkcji $\varphi(x, y)$ oraz $\psi(x, y)$ mamy pole prędkości $\vec{U}(x, y)$, które jest związane z tymi funkcjami w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ U_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

a związki powyższe znane są jako *warunki Cauchy-Riemanna*.

Zarówno funkcja potencjału prędkości jak i funkcja prądu mogą być wyrażone w płaskim układzie współrzędnych biegunowych (r, ϑ) jak pokazano na rys. 9.6. Wzajemne związki między kartezjańskim i biegunowym układem współrzędnych można zapisać następująco:

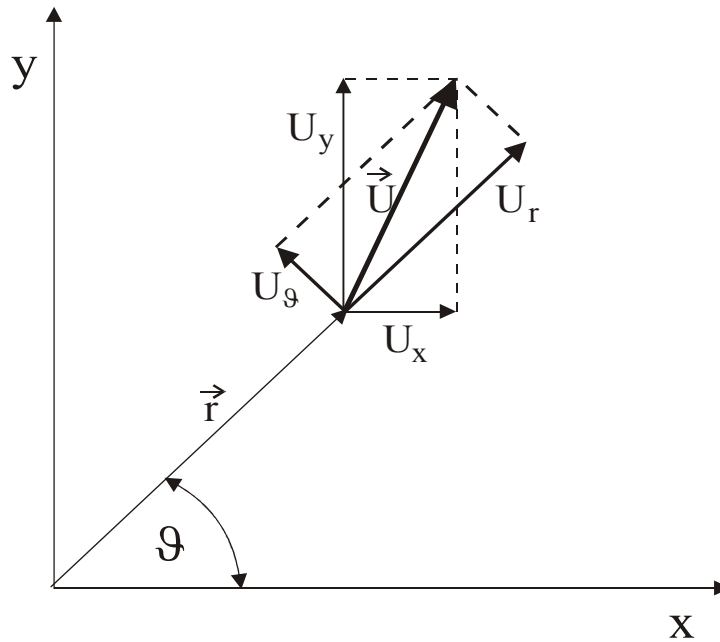
$$x = r \cos \vartheta \quad ; \quad y = r \sin \vartheta$$

a wektor prędkości wyrazić jako

$$\vec{U} = U_r \vec{i}_r + U_\vartheta \vec{i}_\vartheta$$

gdzie

$$U_r = \frac{dr}{dt}; \quad U_\vartheta = r \frac{d\vartheta}{dt}$$



Rys.9.6. Wzajemne zależności między składowymi prędkości w kartezjańskim i biegunowym układzie współrzędnych.

Wzajemne zależności między składowymi prędkości i funkcjami φ oraz ψ , tzn warunki Cauchy-Riemanna zapisać można w płaskim układzie współrzędnych biegunowych jako:

$$\left. \begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ U_s &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

podczas gdy równanie ciągłości przybiera wówczas postać:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0 \quad (9.21)$$

a wynikające z niego równanie Laplace'a dla potencjału prędkości zapisać można:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (9.22)$$

Dla ustalonego, płaskiego bezwirowego przepływu płynu nieściśliwego składowa Ω_z wirowości musi być równa zero, tzn.:

$$\Omega_z = 2 \omega_z = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r U_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \vartheta} \right] = 0 \quad (9.23)$$

podczas gdy pozostałe składowe prędkości kątowej są równe zero z definicji, tzn.:

$$\omega_r = \omega_\vartheta = 0$$

Połączenie zależności (9.20) oraz (9.23) prowadzi do równania Laplace'a dla funkcji prądu:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (9.24)$$

Inną jeszcze właściwość funkcji φ oraz ψ wyprowadzić można z analizy kąta β tworzącego się w płaszczyźnie xy pomiędzy wektorami \vec{n} oraz \vec{n}' (patrz rys. 9.7) normalnymi do linii potencjału prędkości i funkcji prądu:

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

$$\psi(x, y) = \text{const}$$

przecinającymi się w dowolnym punkcie płaszczyzny xy .

Wartość tego kąta obliczyć można następująco:

$$\cos \beta = \vec{n} \cdot \vec{n}' = \frac{\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi}{|\text{grad } \varphi| |\text{grad } \psi|}$$

podczas gdy licznik tego ułamka wyliczyć można z zależności:

$$\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

co po uwzględnieniu warunków Cauchy-Riemanna pozwala zapisać:

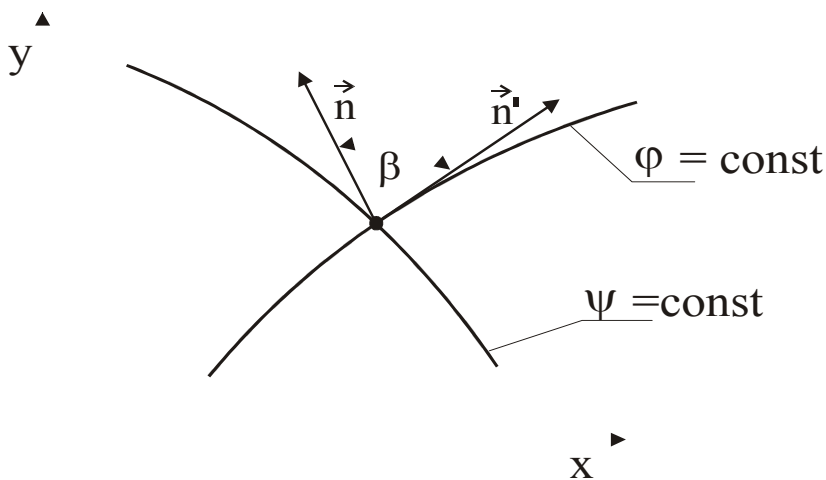
$$\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

Można zatem stwierdzić, że wartość kąta przecięcia wynosi:

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

co ma istotne konsekwencje praktyczne dla analizy przepływów potencjalnych.

Z powyższej analizy wynika bowiem, że linie stałej wartości φ oraz ψ tworzą ortogonalną siatkę, co oznacza z kolei, że jeżeli jedna z tych funkcji została wyznaczona, wówczas druga izolonia może być łatwo wykreślona, co pokazano na rys. 9.7.



Rys.9.7. Wzajemna orientacja linii potencjału i prądu przecinających się w danym punkcie pola przepływu.

Ponieważ z założenia nie może istnieć przepływ w kierunku prostopadłym do linii prądu, stąd też każda z tych linii może być traktowana jako sztywna granica przepływu. Specjalną rolę można przypisać *zerowej linii prądu*:

$$\psi_o = C = 0$$

która wykazuje specjalną i bardzo użyteczną właściwość. Jeżeli wyobrazimy sobie dwie sąsiednie do niej linie prądu położone w nieskończenie małych odległościach z jednej ψ_o^- i drugiej ψ_o^+ strony ψ_o , wówczas będziemy mogli przyjąć, że ich wartości funkcji prądu wynoszą:

$$\psi_o^- \approx \psi_o^+ \approx 0$$

Zgodnie ze wz. (9.17) zapisać będziemy mogli, że wydatek transportowany między tymi liniami wynosi:

$$Q = \psi_o^+ - \psi_o^- \approx 0$$

co pozwala z kolei przyjąć, że linia ψ_o jest nieskończenie cienką ścianą wzdłuż której nie odbywa się przepływ. Dlatego też w wielu zastosowaniach zerowa linia prądu ψ_o jest traktowana jako powierzchnia lub kontur ciała zanurzonego w przepływie (patrz rozdz. 9.4.2).

9.4. Przepływy elementarne

Jak stwierdzono w rozdziale 9.2, proste przepływy potencjalne mogą być nakładane na siebie i tworzyć w ten sposób przepływy bardziej złożone. Jest to bardzo ważna zaleta metody przepływów potencjalnych, gdyż w wielu zastosowaniach praktycznych wystarczy superpozycja kilku zaledwie prostych przepływów (nazywanych *przepływami elementarnymi*) aby utworzyć w ten sposób przepływy o dużym nawet stopniu złożoności.

9.4.1. Przepływ równoległy

Prostoliniowy *przepływ równoległy* nazywany w niektórych podręcznikach *przepływem jednostajnym* (J.Wysocki) lub *jednorodnym* (J.Bukowski) jest najprostszym elementarnym przepływem potencjalnym, którego pole prędkości opisane być może następująco

$$U_x = a ; U_y = b$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi.

Rozpatrywane pole przepływu spełnia równanie ciągłości oraz warunek bezwirowości (Czytelnik proszony jest o sprawdzenie prawdziwości tego stwierdzenia), co spełnia warunki potencjalności. Można zatem stwierdzić, że musi istnieć potencjał prędkości $\varphi(x, y)$, który spełniać będzie warunki:

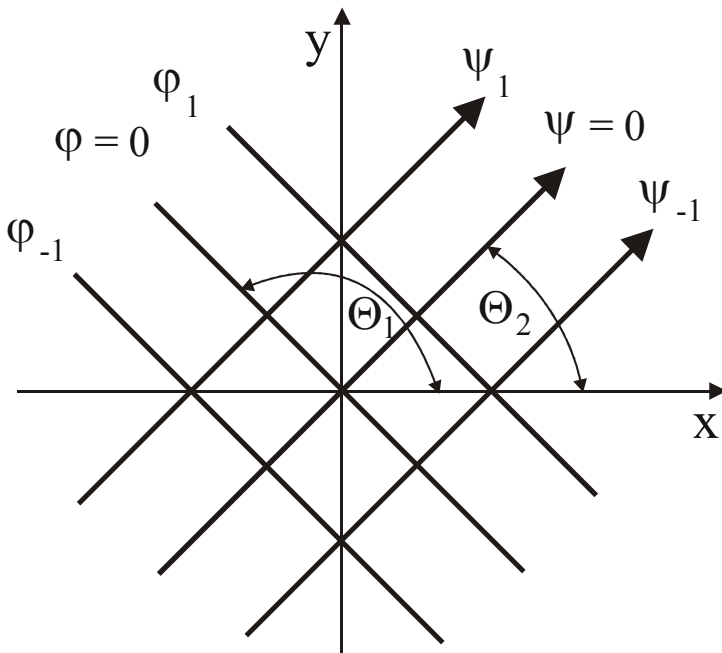
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_x = a ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_y = b$$

co po scałkowaniu daje następującą postać funkcji potencjału:

$$\varphi(x, y) = ax + by \tag{9.25}$$

Dla $\varphi(x, y) = const$ otrzymujemy równanie rodziny linii ekwipotencjalnych:

$$y = -\frac{a}{b}x + C$$



Rys.9.8. Siatka linii potencjału i prądu przepływu równoległego.

Podobnie jak poprzednio, z zal. (1.14) zapisać można:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_x = a \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = U_y = -b$$

co po scałkowaniu pozwala uzyskać funkcję prądu:

$$\psi(x, y) = ay - bx \tag{9.26}$$

i następującą rodzinę linii prądu:

$$y = \frac{b}{a}x + C$$

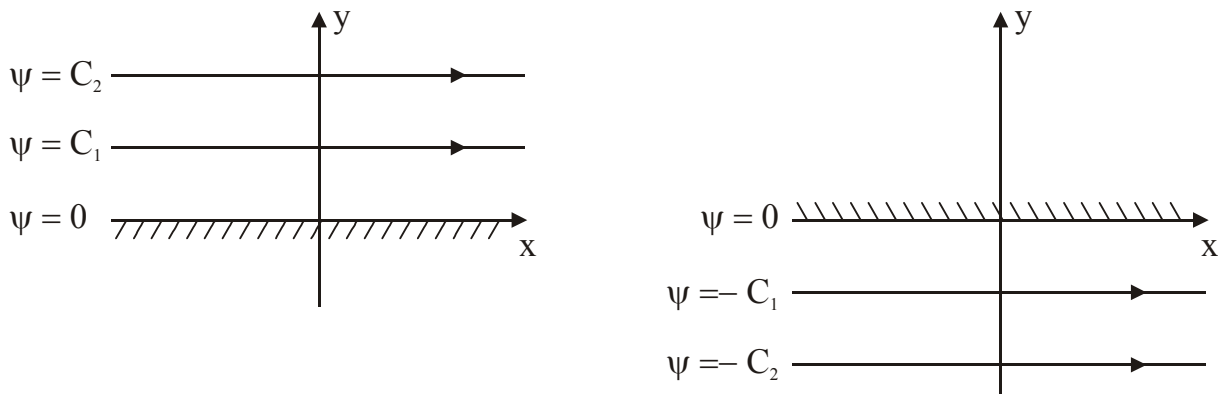
Jak pokazano na rys. 9.8, linie stałej wartości funkcji potencjału są przedstawione jako równoległe linie proste, nachylone pod kątem θ takim, że:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{a}{b}$$

podczas gdy linie prądu są przedstawione jako linie przerywane, dla których:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{b}{a}$$

Przepływ równoległy dla dodatnich wartości a oraz b jest skierowany od trzeciej do pierwszej ćwiartki, jak wskazują to strzałki na liniach $\Psi(x, y) = \text{const}$ na rys. 9.8.



Rys.9.9. Przepływ równoległy wzdłuż ściany.

Linie potencjału prędkości i linie prądu tworzą ortogonalną siatkę, co potwierdza wcześniej sformułowane spostrzeżenie. Sposób wykorzystania właściwości zerowej linii prądu Ψ_0 pokazano na rys. 9.9, który ilustruje możliwość opisu przepływu wzdłuż płaskiej ściany utworzonej przez linię Ψ_0 .

9.4.2. Przepływ w narożu

Rozważmy przepływ, którego funkcja potencjału prędkości dana jest związkiem:

$$\varphi(x, y) = a(x^2 - y^2) \quad (9.27)$$

gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Składowe wektora prędkości tego przepływu obliczyć można następująco:

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax$$

$$U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay$$

i wykorzystując warunki Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ay$$

otrzymujemy po scałkowaniu następującą funkcję prądu:

$$\psi = 2axy \quad (9.28)$$

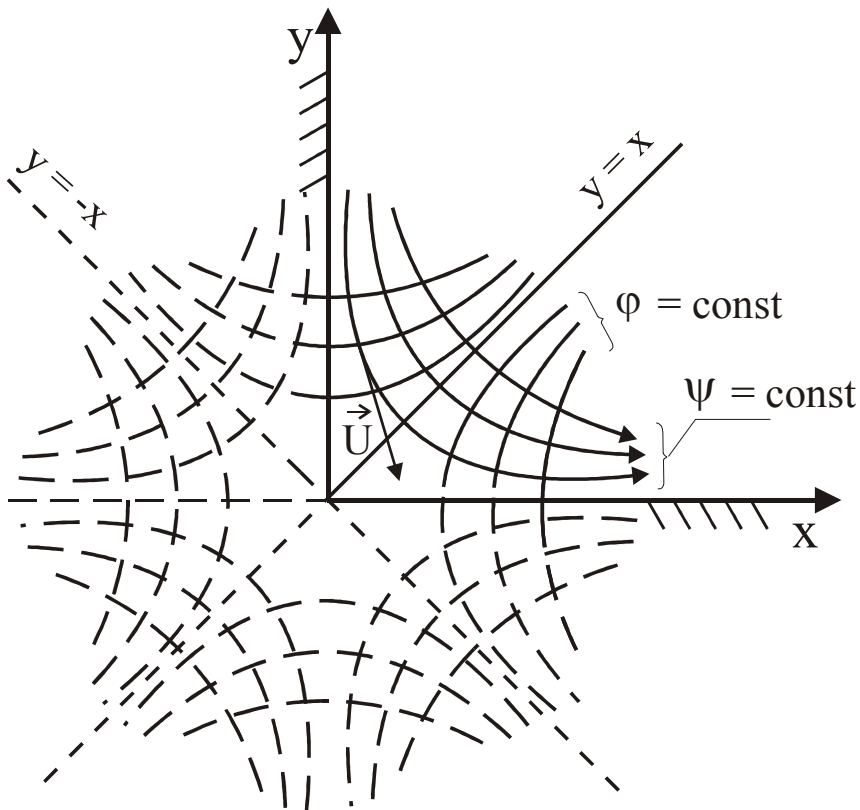
Zakładając $\psi = const$ otrzymujemy:

$$xy = C \quad (9.28a)$$

co oznacza, że linie prądu przedstawiają rodzinę równoosiowych hiperbol (patrz rys. 9.10 – linie ciągłe), podczas gdy linie ekwipotencjalne

$$x^2 - y^2 = C$$

są także przedstawione przez rodzinę hiperbol z asymptotami $y=x$ i $y=-x$ (patrz rys. 9.10 – linie przerywane).



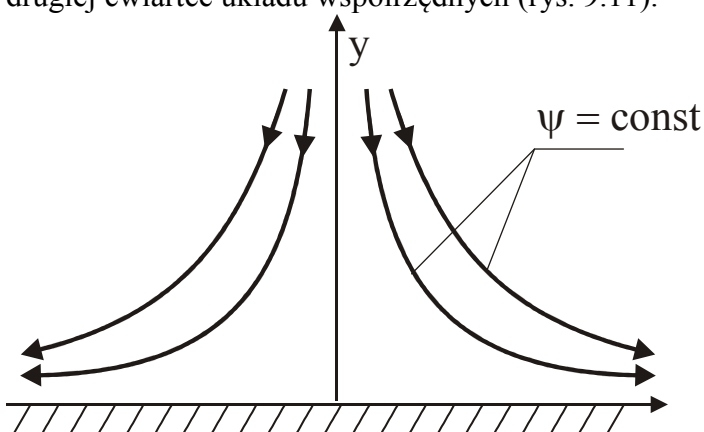
Rys.9.10. Linie potencjału i prądu dla przepływu w narożu.

Specjalny sens fizyczny przypisać można zerowym liniom prądu, które otrzymujemy podstawiając $C = 0$ do zw. (9.28a). Otrzymujemy wówczas:

$$x = 0 ; \quad y = 0$$

co oznacza, że osie układu współrzędnych są zerowymi liniami prądu, zaznaczonymi na rys. 9.10 jako ψ_0 , które to linie mogą być uważane za nieskończenie cienkie, lecz sztywne ściany. Aby pokazać to bardziej jasno, wyobrażone przez nas ściany ψ_0 zostały zaznaczone na rysunku kreskowaniem i dzięki tej interpretacji otrzymujemy przepływ w jednej ćwiartce układu współrzędnych, nazywany *przepływem w narożu*.

Inną, możliwą interpretację tego przepływu otrzymamy uwzględniając istnienie tylko jednej zerowej linii prądu pokrywającej się z osią y i uwzględniając tylko linie prądu w pierwszej i drugiej ćwiartce układu współrzędnych (rys. 9.11).



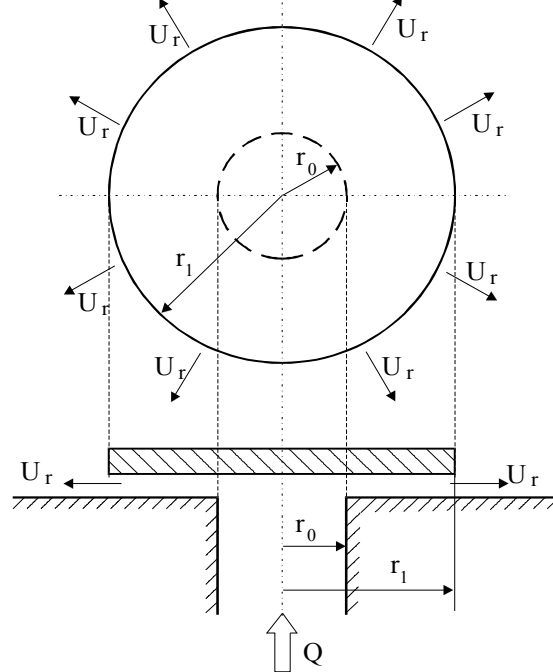
Rys.9.11. Linie prądu dla przepływu uderzającego.

Kształt linii prądu sugeruje, że rozpatrywany tutaj przepływ potencjalny może być rozumiany jako przepływ wzdłuż osi y uderzający w płaską płytę, którą stanowi oś x (taki przepływ nazywany jest *przepływem uderzającym*).

W początku układu współrzędnych otrzymujemy wówczas punkt stagnacji, w którym prędkość spada do zera.

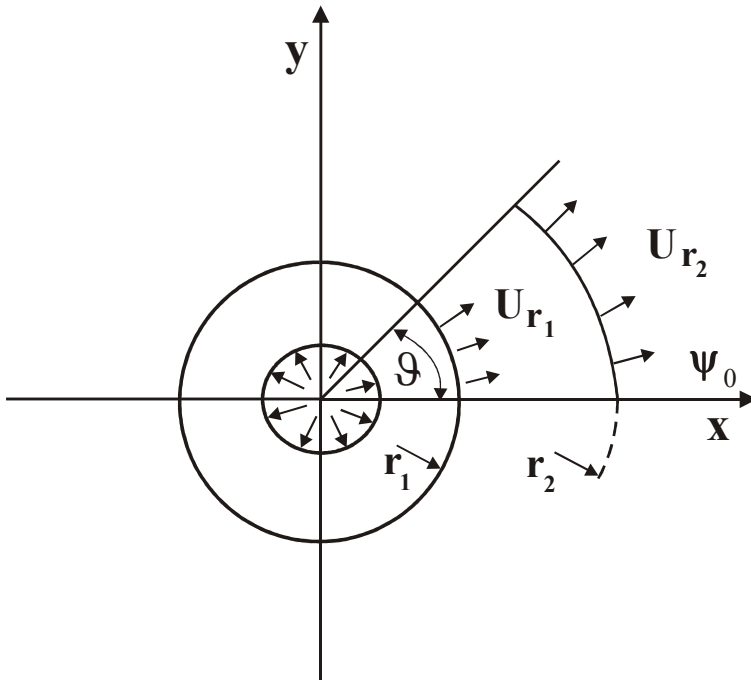
9.4.3. Źródło płaskie

Następnym przepływem elementarnym jest *źródło płaskie*, które możemy wyobrazić sobie jako punkt na płaszczyźnie przepływu, w którym płyn wydobywa się promieniowo wzdłuż tej płaszczyzny z jednakową intensywnością we wszystkich kierunkach.



Rys.9.12. Praktyczna realizacja źródła płaskiego.

Jak pokazano na rys. 9.12 praktycznym przykładem realizacji źródła płaskiego jest przepływ w rurze doprowadzający czynnik do pierścieniowej szczeliny pomiędzy dwoma równoległymi płytami. Jeżeli pominiemy tarcie i założymy zerową wartość kąta napływającego strumienia, wówczas wypływ z rury będzie odbywał się promieniowo i linie prądu $\psi = const$ będą przedstawiać rodzinę linii prostych przecinających początek układu współrzędnych i zlokalizowanych w płaszczyźnie xy (patrz rys. 9.13).



Rys.9.13. Pole przepływu w źródle płaskim.

Objętości płynu przepływającego w jednostce czasu przez kolejne promieniowe przekroje mogą być określone jako iloczyn składowej prędkości normalnej do powierzchni przekroju (tzn. U_r w naszym przypadku) i wielkości powierzchni przekroju, który traktować możemy jako prostokąt o dłuższym boku równym długości łuku i krótszym boku równym jednostkowej wysokości (w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przepływu). Ponieważ natężenia objętościowe płynu przepływającego przez kolejne przekroje promieniowe muszą być identyczne, pozwala to zapisać:

$$U_{r1} r_1 g = U_{r2} r_2 g = \dots = U_r r g = const$$

i po przekształceniach

$$\frac{U_{r1}}{U_{r2}} = \frac{r_2}{r_1}$$

co oznacza, że prędkość promieniowa w źródle płaskim jest odwrotnie proporcjonalna do odległości od źródła (należy jednak zauważyć, że w centrum źródła mamy punkt osobliwy gdyż dla $r \rightarrow 0$ otrzymujemy $U_r \rightarrow \infty$).

Objętość nieściśliwego płynu wypływająca ze źródła może być obliczona jako całka powierzchniowa:

$$\int_{S_o}^{\rightarrow} n dS = 2\pi r U_r l = Q = const$$

gdzie S_o jest powierzchnią cylindra o promieniu r i jednostkowej wysokości 1, podczas gdy Q jest jednostkowym wydatkiem (przypadającym na jednostkę wysokości paska powstałego z rozwinięcia pierścienia). Wykorzystując warunki Cauchy-Riemanna można napisać:

$$U_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

i po scałkowaniu można otrzymać następujące wyrażenie na funkcję potencjału prędkości:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (9.29)$$

Łatwo można przy tym obliczyć, że składowa obwodowa prędkości U_θ dla przepływu w źródle równa jest zeru:

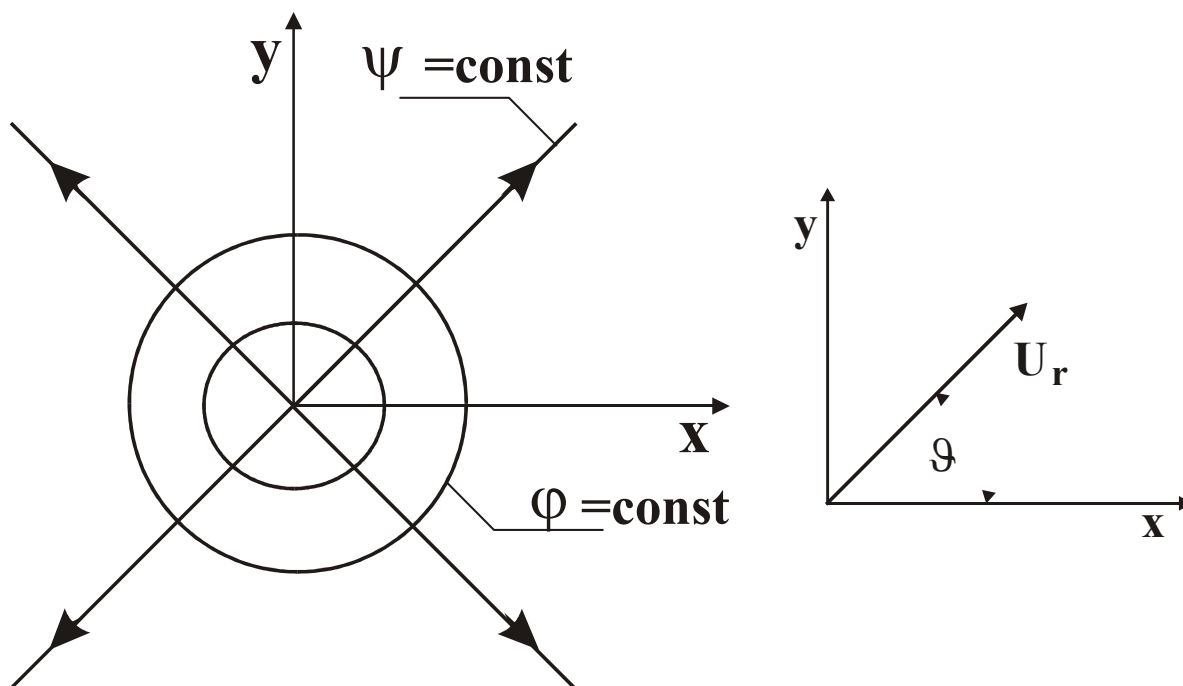
$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

Funkcję prądu można w ogólnym przypadku wyznaczyć z warunków Cauchy-Riemanna (wz. 9.20) chociaż dla źródła znacznie łatwiej jest skorzystać z definicyjnej zależności wiążącej różnicę wartości funkcji prądu z wydatkiem płynu transportowanego między tymi liniami, tzn.:

$$\psi - \psi_0 = \frac{Q}{2\pi} \vartheta$$

skąd otrzymujemy:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \vartheta \quad (9.30)$$



Rys.9.14. Linie potencjału prędkości i linie prądu źródła płaskiego.

Jak można zauważyć na rys. 9.14, dla linii ekwipotencjalnych spełniony jest następujący warunek:

$$\varphi = const \Rightarrow r = const$$

co oznacza, że izolinie funkcji potencjału tworzą rodzinę okręgów o środkach w początku układu współrzędnych (który pokrywa się tutaj ze środkiem geometrycznym źródła). Jeżeli

wyrażenie $\frac{Q}{2\pi}$ (nazywane *intensywnością źródła*) jest dodatnie, wówczas potencjał źródła φ

maleje wraz ze wzrostem wartości r i przepływ skierowany jest promieniowo na zewnątrz, jak pokazują to strzałki na liniach prądu z rys. 9.14.

Jeżeli wydatek źródła Q jest ujemny, wówczas związki

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \vartheta$$

opisują potencjał prędkości i funkcję prądu *upustu* (źródła o ujemnym wydatku).

Jest oczywistym, że promieniowy przepływ w którym elementy płynu poruszają się po liniach prostych sprawia, że dwuwymiarowe źródło (lub upust) jest przepływem bezwirowym, a zainteresowany Czytelnik może sprawdzić warunek dany zw. (9.6.a).

Biegunowy układ współrzędnych jest w sposób oczywisty najbardziej naturalny dla opisu przepływu w źródle, jednak w niektórych zastosowaniach wygodniej jest opisać ten przepływ w układzie kartezjańskim. Wykorzystując oznaczenia zamieszczone na rys. 9.14 można wyrazić składowe prędkości źródła w układzie x,y następująco:

$$U_x = U_r \cos \vartheta \quad ; \quad U_y = U_r \sin \vartheta$$

co po przekształceniach daje:

$$U_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$U_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Funkcje potencjału i prądu przyjmą zatem w kartezjańskim układzie współrzędnych postać następującą:

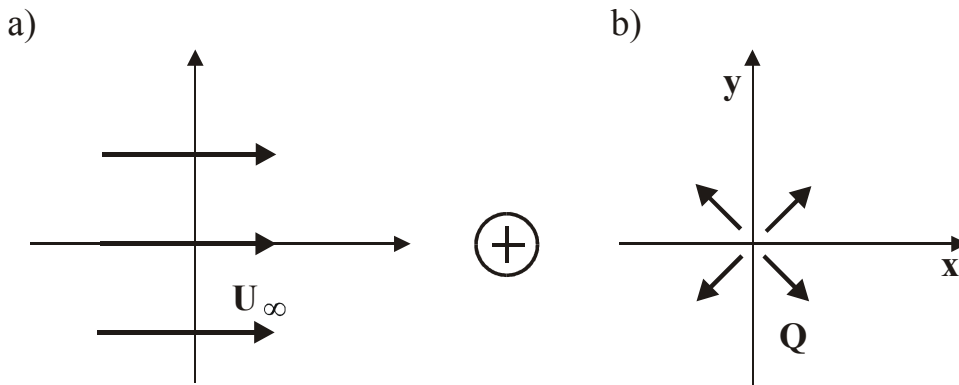
$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{Q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) \tag{9.29a}$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \tag{9.30a}$$

9.5. Superpozycja przepływów elementarnych – przykład rozwiązania

W rozdziale 9.2 stwierdziliśmy, że równanie Laplace'a jest liniowe i że suma dwóch jego rozwiązań jest również rozwiązaniem równania Laplace'a.

Jako przykład rozważmy złożenie przepływu jednorodnego wzdłuż osi x (od lewej do prawej – rys. 9.15.a) i źródła o natężeniu objętościowym Q zlokalizowanego w początku układu współrzędnych (rys. 9.15.b).



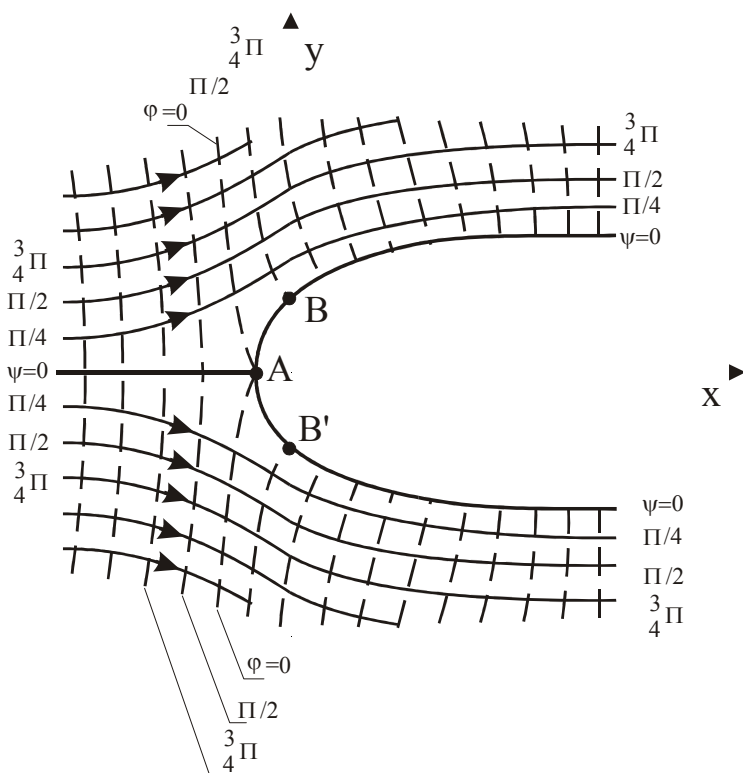
Rys.9.15. Złożenie przepływu jednorodnego a) i źródła b).

Superpozycja tych dwóch przepływów potencjalnych oznacza, że funkcja potencjału prędkości równa jest sumie funkcji potencjałów przepływów składowych, co daje:

$$\varphi = U_{\infty} x + \frac{Q}{2\pi} \ln r = U_{\infty} x + \frac{Q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (9.31)$$

podczas gdy funkcja prądu przepływu wynikowego dana jest związkiem:

$$\psi = U_{\infty} y + \frac{Q}{2\pi} \vartheta = U_{\infty} y + \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (9.32)$$



Rys.9.16. Linie prądu i linie ekwipotencjalne przepływu powstałego przez złożenie przepływu jednorodnego i źródła.

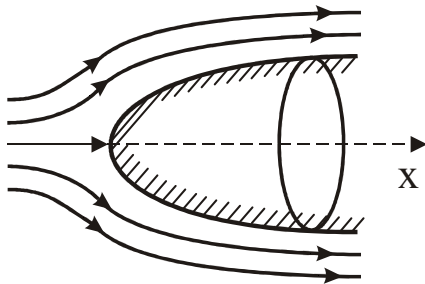
Izolinie potencjału prędkości i funkcji prądu naniesiono na rys. 9.16, natomiast opis zerowej linii prądu ψ_0 otrzymujemy z zal. (9.32) podstawiając:

$$U_{\infty} y + \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0 \quad (9.33)$$

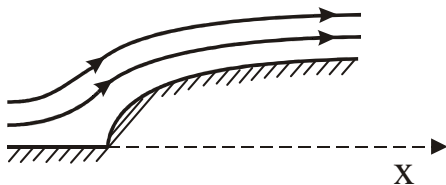
co po przekształceniach daje:

$$x = -y \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi U_\infty}{Q} y \right) \quad (9.33a)$$

a)



b)



Rys.9.17. Kształt linii prądu wokół opływowo ukształtowanego ciała (a) i ściany (b).

Jeżeli zastąpimy linię prądu ψ_0 nieskończenie cienką ścianą, wówczas rozważany przepływ będziemy mogli traktować jako opływ aerodynamicznie ukształtowanego ciała, którego przekrój wyznaczony jest linią ψ_0 (patrz rys. 9.17a) pod warunkiem jednak, że ta część zerowej linii prądu, którą tworzy oś x zostanie wyłączona z analizy. Jeżeli natomiast rozważać będziemy tylko górną (lub dolną) część przepływu wynikowego, wówczas możemy go traktować jako opływ aerodynamicznie ukształtowanej ściany lub pagórka (patrz rys. 9.17.b). Pojęcie „ukształtowany aerodynamicznie” jest intuicyjnie jasne i może być rozumiane jako taki kształt opływającego ciała do którego dobrze „przylegają” linie prądu. Bardziej dokładnie możemy określić taki kształt stwierdzając, że nie występują tutaj zjawiska oderwania, co wyjaśniono szerzej w rozdziale dotyczącym warstwy przyściennej i zjawisk oporu aerodynamicznego.

Określimy teraz lokalizację charakterystycznych punktów na linii prądu ψ_0 pokazanej na rys. 9.16. Położenie punktu A (umiejscowionego na nosku profilu) można obliczyć korzystając z rozwinięcia funkcji ctg występującej we wz. (9.33.a) w szereg Taylora:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{3}z + \frac{1}{45}z^3 + \dots \right) \text{ dla } 0 < |z| < \pi$$

co pozwala wyznaczyć współrzędne w sposób następujący:

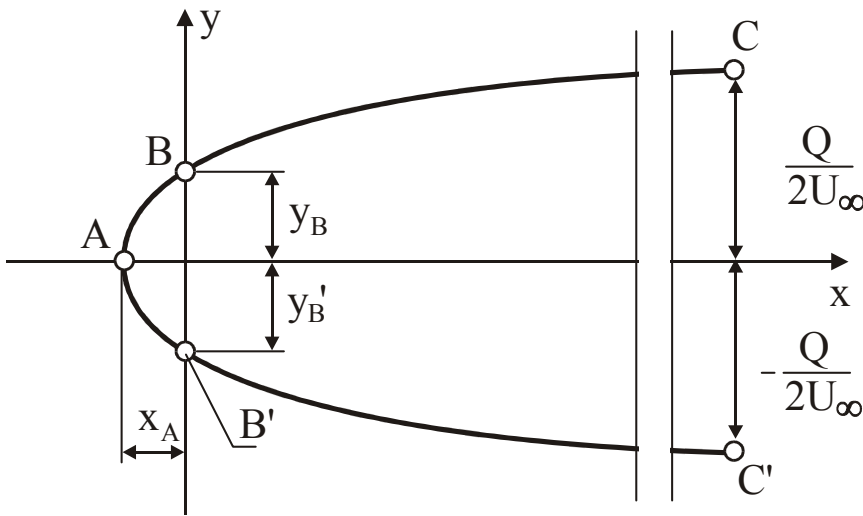
$$y_A = 0 \quad ; \quad x_A = -\frac{Q}{2\pi U_\infty} \quad (9.33.b)$$

Położenie punktów B oraz B' można wyznaczyć podstawiając do wz. (9.33):

$$x_{B,B'} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{y}{x} \right) \rightarrow \infty \quad ; \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

co pozwala stwierdzić, że punkty B, B' są określone następującymi współrzędnymi:

$$x_{B,B''} = 0 \quad ; \quad y_{B,B'} = \pm \frac{Q}{4U_\infty} \quad (9.33.c)$$



Rys.9.18. Kształt zerowej linii prądu ciała opływowego.

Grubość profilu utworzonego przez zerową linię prądu ψ_0 narasta w kierunku dodatniego zwrotu osi x i osiąga w sposób asymptotyczny ostateczny rozmiar, który obliczyć można podstawiając do wz. (9.33):

$$x \rightarrow \infty \quad ; \quad \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \pm\pi$$

co pozwala zapisać współrzędne tych punktów następująco:

$$x_{C,C'} \rightarrow \infty \quad ; \quad y_{C,C'} = \pm \frac{Q}{2U_\infty} \quad (9.33.d)$$

co oznacza, że w granicy profil osiąga dokładnie dwa razy większą grubość niż w przekroju $x = 0$.

Składowe prędkości pola przepływu wokół profilu utworzonego przez zerową linię prądu ψ_0 można wyliczyć z warunków Cauchy-Riemanna w sposób następujący:

$$U_x = U_\infty + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$U_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (9.33.e)$$

Jak można zauważyć, składowa U_x zawiera prędkość bazową U_∞ oraz człon dodatkowy (zaburzenie przepływu bazowego wprowadzone przez źródło), który jest odwrotnie proporcjonalny do $r^2 = x^2 + y^2$ podczas gdy składowa U_y zawiera wyłącznie człon zaburzający, który pochodzi od źródła. Zerowa linia prądu ψ_0 oddziela źródło od głównego (jednorodnego) przepływu (patrz rys. 9.18) wykazuje, że w dużej odległości od źródła jego wpływ staje się pomijalnie mały i otrzymujemy tam przepływ jednorodny co wobec zerowej wartości prędkości normalnej do linii ψ_0 pozwala stwierdzić, że zaburzenie jest zawarte wewnątrz zerowej linii prądu. Analiza warunku brzegowego na zewnętrznej granicy obszaru (tj. w nieskończoności):

$$x \rightarrow -\infty \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad ; \quad U_x \rightarrow U_\infty \quad ; \quad U_y \rightarrow 0$$

Sprawdźmy teraz rozkład prędkości wzdłuż zerowej linii prądu ψ_0 , aby przekonać się, czy można go uważać za fizycznie poprawny dla przepływu wokół ciała opływowego. Należy tu jednak pamiętać, że model przepływu potencjalnego zakłada, że płyn jest nielepki i dlatego też zamiast fizycznie uzasadnionej zerowej wartości prędkości wzdłuż ściany (linii ψ_0) otrzymujemy tu prędkość, która w rzeczywistości występuje poza warstwą przyścienną.

Wartości składowych prędkości w punkcie A (patrz rys. 9.18) można wyliczyć przez podstawienie współrzędnych (9.33.b) do wz. (9.33.e) otrzymując:

$$U_x = U_y = \left| \vec{U} \right| = 0$$

co potwierdza, że A jest punktem stagnacji. Następną charakterystyczną wartość prędkości można wyliczyć w punktach B, B' , dla których po podstawieniu zal. (9.33.c) do wz. (9.33.e) otrzymujemy:

$$U_x = U_\infty \quad ; \quad U_y = \pm \frac{2U_\infty}{\pi}$$

$$\left| \vec{U} \right| = U_\infty \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \cong 1.18U_\infty$$

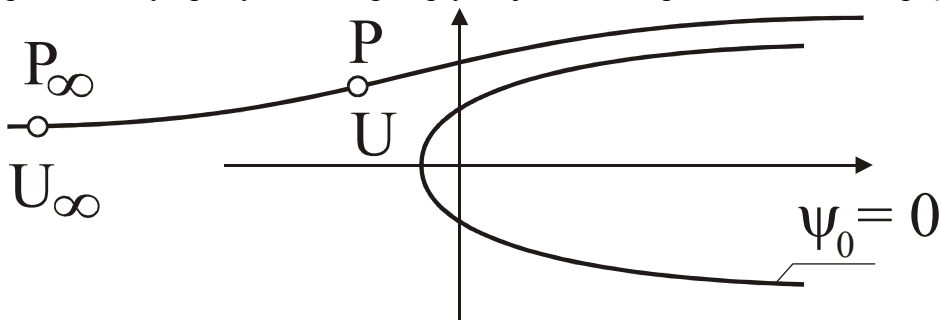
Należy zwrócić uwagę na występujące tu przyspieszenie przepływu wywołane umieszczeniem opływającego ciała w przepływie, co powoduje wystąpienie na powierzchni ciała w otoczeniu punktów B oraz B' prędkości większej niż w przepływie niezakłóconym. Ten zaskakujący wniosek znajduje potwierdzenie w eksperymencie i wrócimy do tego zagadnienia w trakcie dyskusji rozkładów ciśnienia.

Następnie, po podstawieniu wz. (9.33.d) do zal. (9.33.c) otrzymujemy

$$x \rightarrow \infty \quad U_x \rightarrow U_\infty$$

$$U_y \rightarrow 0$$

co potwierdza poprzednio sformułowany wniosek, że w dużej odległości od źródła przepływ powraca asymptotycznie do przepływu jednorodnego wzdłuż osi x z prędkością U_∞ .



Rys.9.19. Zastosowanie równania Bernoulliego do wyznaczenia pola ciśnień wzdłuż linii prądu.

Jeżeli znamy już pole prędkości, wówczas możemy określić rozkład ciśnienia w przepływie wykorzystując w tym celu równanie Bernoulliego, które dla dwóch dowolnych punktów położonych na tej samej linii prądu (patrz rys. 9.19) pozwala zapisać:

$$p_\infty + \frac{\rho U_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho \left| \vec{U} \right|^2}{2}$$

skąd po przekształceniach otrzymać możemy tzw. bezwymiarowy współczynnik ciśnienia określany jako różnica ciśnień statycznych w danym punkcie i w przepływie niezakłóconym, odniesiona do ciśnienia dynamicznego przepływu niezaburzonego:

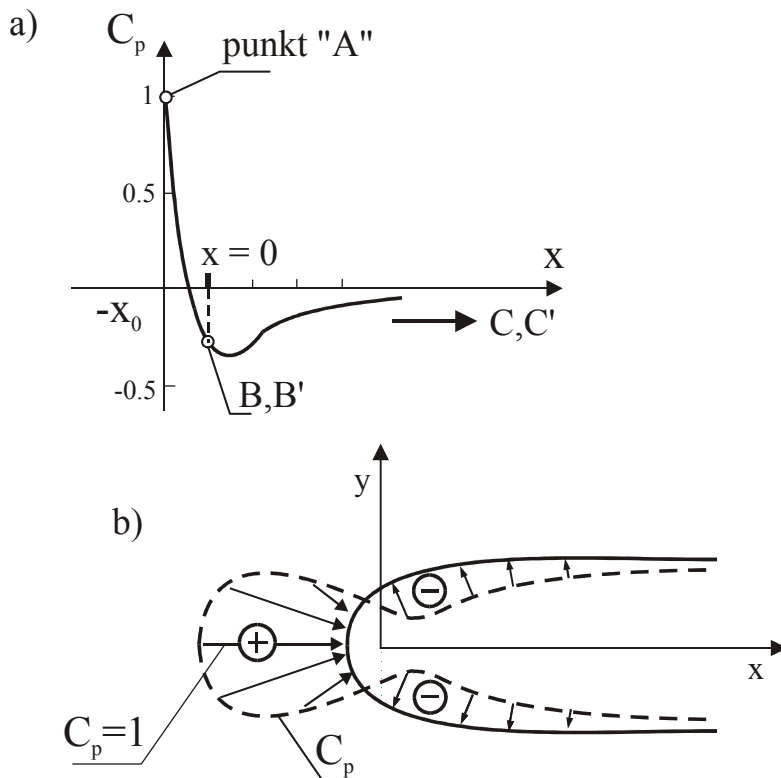
$$C_p = \frac{\Delta p}{q_\infty} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left[\frac{|\vec{U}|}{U_\infty} \right]^2 \quad (9.34)$$

gdzie $q_\infty = \frac{\rho U_\infty^2}{2}$ jest ciśnieniem dynamicznym przepływu niezaburzonego.

Po podstawieniu wz. (9.33.e) do powyższej zależności otrzymujemy:

$$C_p = \frac{\Delta p}{q_\infty} = -\frac{Q}{\pi U_\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} \left[x + \frac{Q}{4\pi U_\infty} \right]$$

które to wyrażenie pozwala obliczyć wartość współczynnika ciśnienia w dowolnym punkcie przepływu. W praktyce, najbardziej interesuje nas rozkład ciśnienia na powierzchni opływającego ciała, gdyż rozkład ten pozwala obliczyć siłę działającą na opływany obiekt. Po wprowadzeniu do powyższej zależności współrzędnych zerowej linii prądu ψ_0 możemy obliczyć rozkład ciśnienia na powierzchni opływającego ciała (patrz rys. 9.20).



Rys.9.20. Rozkład ciśnienia na powierzchni (ψ_0) opływającego ciała (lokalizacja punktów – patrz rys. 9.18).

Jak pokazano na rys. 9.20.a, położenie punktu stagnacji określone jest następującymi współrzędnymi:

$$x_A = -\frac{Q}{2\pi U_\infty} \quad ; \quad y_A = 0$$

a odpowiadająca temu punktowi wartość bezwymiarowego współczynnika ciśnienia wynosi:

$$C_p = \frac{\Delta p_A}{q_\infty} = -\frac{Q}{\pi U_\infty} \left(\frac{2U_\infty \pi}{Q} + \frac{\pi U_\infty}{Q} \right) = 1$$

podczas gdy dla $x \rightarrow \infty$

$$C_p = \frac{\Delta p_\infty}{q_\infty} = 0$$

co oznacza, że ciśnienie na powierzchni wyznaczonej przez ψ_0 w nieskończenie dużej odległości od początku współrzędnych jest takie samo jak w otaczającym przepływie.

Na rys. 9.20.b pokazano zmienność współczynnika ciśnienia wzdłuż linii prądu ψ_0 , przy czym współczynnik ten został narysowany w sposób przyjęty zwyczajowo w aerodynamice. W konwencji tej dodatnia wartość C_p jest naniesiona w dodatnim kierunku osi normalnej do powierzchni, natomiast ujemne wartości C_p w kierunku przeciwnym, co pozwala na identyfikację obszarów na powierzchni ciała w których ciśnienie jest wyższe lub niższe niż w otaczającym przepływie.

Jak pokazano na rys. 9.20.b, najwyższa dodatnia wartość C_p występuje w punkcie stagnacji i w bezpośrednim otoczeniu tego punktu ciśnienie jest wyższe niż w przepływie otaczającym. Najniższa wartość C_p występuje bezpośrednio za punktem o współrzędnej $x = 0$ i następnie wraz z oddalaniem się od początku układu współrzędnych ciśnienie w przepływie dąży do wartości identycznej jak w przepływie otaczającym.

Zarówno rozkład prędkości jak i ciśnienia w modelowanym przepływie potencjalnym dość dobrze zgadzają się z wartościami charakteryzującymi przepływ rzeczywisty jeżeli tylko linie prądu położone najbliżej opływającego ciała są równoległe do powierzchni (tzn. nie występuje zjawisko oderwania). Oznacza to, że metoda przepływów potencjalnych może być użytecznym narzędziem w analizie pól prędkości i ciśnienia w przepływach wokół ciał opływowych, w których nie występuje zjawisko oderwania.

Warto również zauważyć, że zastąpienie źródła przez upust o wydatku $-Q$ spowoduje, że funkcja potencjału i prądu dane będą następującymi zależnościami:

$$\varphi = U_\infty x - \frac{Q}{2\pi} \ln r = U_\infty x - \frac{Q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (9.31.a)$$

$$\psi = U_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \vartheta = U_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (9.32.a)$$

a nowy układ linii potencjału i prądu będzie lustrzanym odbiciem względem osi y zespołu linii pokazanego na rys. 9.16, przy czym nadal linie prądu będą skierowane z lewej strony na prawą (tzn. w kierunku dodatniego zwrotu osi x).