

Zdzisław Stęgowski

**Badania znacznikowe i modelowanie
komputerowe wybranych układów
przepływowych**

**Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
AGH w Krakowie, 2010**

Opiniodawcy:

Prof. Andrzej G. Chmielewski

Prof. Andrzej Kreft

ISBN 978-83-925779-2-8

Adiustacja i korekta:

Katarzyna Stęgowska

Wydawnictwo:

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

AGH w Krakowie, 2010

Spis treści

Streszczenie	5
Summary	7
Wstęp	9
1. Modelowania fenomenologiczne układów przepływowych w powiązaniu z badaniami znacznikowymi	13
1.1. Układy przepływowe	13
1.2. Opis układu przepływowego poprzez funkcję rozkładu czasu przebywania	14
1.3. Modele przepływu o parametrach uśrednionych	22
1.3.1. Model dyfuzji turbulentnej	22
1.3.2. Modele komorowe	26
1.3.3. Analityczne i numeryczne metody modelowania ..	32
1.4. Badania przepływów w procesach wzbogacania rud miedzi	42
1.4.1. Procesy wzbogacania rudy miedzi	42
1.4.2. Znakowanie rud miedzi	44
1.4.3. Badania porównawcze dwóch typów maszyn flotacyjnych	45
1.4.4. Badania procesu mielenia i klasyfikacji	50
1.4.5. Identyfikacja procesów odwadniania koncentratu rud miedzi	54
1.5. Podsumowanie	64
2. Zastosowanie numerycznej mechaniki płynów na przykładzie granulometrycznego rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie	67
2.1. Wprowadzenie	67
2.2. Zasada działania hydrocyklonu	68

2.3. Przemysłowe pomiary znacznikowe	72
2.4. Podstawy modelowania turbulentnego przepływu płynu ..	76
2.5. Podstawy modelowania przepływu mieszanki ciecz-faza stała	83
2.6. Symulacje CFD dla hydrocyklonu	86
2.6.1. Parametry symulacji	86
2.6.2. Rozkład pola prędkości	87
2.6.3. Rozkłady stężenia objętościowego faz	89
2.6.4. Wartości uśrednione przepływu	93
2.6.5. Porównanie wyników dla różnych modeli	95
2.7. Weryfikacja i predykcja klasyfikacji fazy stałej w hydrocyklonie	98
2.8. Podsumowanie	103
3. Metoda sztucznych sieci neuronowych w badaniach z użyciem wielu znaczników promieniotwórczych	105
3.1. Wprowadzenie	105
3.2. Opis sztucznych sieci neuronowych	106
3.3. Analiza widm otrzymywanych z detektora scyntylicyjnego	110
3.3.1. Wprowadzenie	110
3.3.2. Transformacja widm symulowanych	113
3.3.3. Transformacja widm pomiarowych	119
3.4. Wieloznacznikowe pomiary na przykładzie wyznaczania dyfuzji metali w stalach	124
4. Podsumowanie	131
Literatura	135

Badania znacznikowe i modelowanie komputerowe wybranych układów przepływowych

Streszczenie

W pracy przedstawione są wybrane zagadnienia z zakresu badań znacznikowych i modelowania układów przepływowych. Praca składa się z trzech zasadniczych części.

Pierwsza część pracy poświęcona jest fenomenologicznemu modelowaniu układów przepływowych w oparciu o doświadczalnie wyznaczone funkcje rozkładu czasu przebywania. Omówione zostały podstawy teoretyczne modeli opartych na zjawisku idealnego wymieszania oraz przepływu dyspersyjnego. Przedstawiono analityczne i numeryczne metody stosowane w tego typu modelowaniu. Na zakończenie tej części pracy przedstawiono doświadczalne wyniki badań znacznikowych procesów wzbogacania rud miedzi oraz modele przepływu zastosowane do ich opisu.

Druga część pracy dotyczy modelowania układów przepływowych z zastosowaniem numerycznej mechaniki płynów – CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Omówione zostały podstawy teoretyczne stosowane w symulacjach CFD dla przepływów jedno i wielofazowych. Jako przykład modelowania CFD przedstawiono wyniki symulacji dla procesu klasyfikacji cząstek fazy stałej w hydrocyklonie. Dane otrzymane z tych symulacji zostały porównane z wynikami doświadczalnymi uzyskanymi w pomiarach znacznikowych. Oprócz tego pokazano również możliwości predykcji pracy hydrocyklonu poprzez zastosowanie metody CFD.

Trzecia część pracy przedstawia autorskie rozwiązanie zastosowania sztucznych sieci neuronowych do analizy widm promieniowania gamma badanych za pomocą detektorów scyntylacyjnych. Opracowana metoda pozwala na równoczesne zastosowanie różnych izotopów promieniotwórczych w badaniach znacznikowych. Praktyczne zastosowanie tej metody zostało zobrazowane przykładem badania procesu dyfuzji metali w stalach.

Tracer investigations and computer modelling for selected flow systems

Summary

The publication presents selected issues of tracer investigations and flow systems modelling. The publication consists of three fundamental chapters.

The first part of the publication is dedicated to the phenomenological flow systems modelling based on the experimental determination of the residence time distribution functions. The theoretical models bases of the perfect mixing process and the dispersion flow are described. The analytical and numerical methods used in these kind of modelling are also presented. At the end of this chapter the experimental results of the tracers' investigation of the copper ore concentration processes and flow models for their description are presented.

The second part of the publication concerns the flow systems modelling with the use of the computational fluid dynamics (CFD) method. The theoretical bases of the monophase and multiphase flows simulation using the CFD method are described. As an example of the CFD modelling the classification process of the solid grains in a hydrocyclone is presented. The results from the CFD simulation were compared with the experimental data obtained from the tracers' experiments. The possibilities of the hydrocyclone performance prediction by CFD are also presented.

The third part of the publication presents an original method of applying artificial neural networks for gamma rays spectrum analysis obtained from the scintillation detectors. The achieved method allows the use of several radiotracers simultaneously in measurements. The measurement of metals diffusion in steels has been presented as an example of the application of this method.

Wstęp

Przepływy płynów, ich mieszanin lub mieszanin płynów i cząstek fazy stałej są powszechnym zjawiskiem występującym w środowisku naturalnym oraz w urządzeniach technicznych i przemysłowych. Badania i modelowanie dynamiki tych przepływów stanowią szeroki obszar działalności w naukach technicznych, podstawowych oraz fizyce środowiska. Jednym ze sposobów badania układów przepływowych jest metoda znacznikowa, w szczególności z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych. Taka metodyka badań zaczęła się rozwijać na początku drugiej połowy ubiegłego wieku. Wraz z rozwojem tej metody pojawiały się kolejne monografie na ten temat (Gardner i Ely 1967, Charlton 1986, IAEA 1990, Iller i Thyn 1994, Dziunikowski 1998, Thyn i in. 2000, Axelsson i in. 2004, Zuber i in. 2007, Berne i in. 2008). Monografie te ukazywały się wraz z rozwojem metodyki i techniki prowadzenia badań znacznikowych, poszerzaniem się zakresu ich stosowania oraz postępem w zakresie metod analizy danych i modelowania układów przepływowych. Teoretyczny opis rzeczywistych przepływów płynów i mieszanin jest do dnia dzisiejszego zagadnieniem otwartym. W przeciągu ostatniego stulecia powstało wiele modeli teoretycznych i półdoświadczalnych opisujących zjawiska przepływu. Modele te mają bardzo różny charakter zależnie od skali opisu zjawiska przepływu. W przypadku makroskali od dawna są stosowane modele fenomenologiczne o parametrach uśrednionych dla całości lub dużych części układu przepływowego. Do tego typu modeli zaliczamy modele idealnego wymieszania (komorowe) oraz modele dyspersyjne. Drugą klasą modeli są modele umożliwiające opis lokalnych cech przepływu. W modelach tych wyjściową podstawą są zasady stosowane w mechanice płynów, czyli zasada ciągłości przepływu oraz zasada zachowania pędu i energii. Dla przepływu mieszanin płyn-faza stała dodatkowo dochodzą prawa oddziaływania cząstek z płynem. Modele te są formułowane w postaci równań różniczkowych cząstkowych uzupełnionych zależnościami algebraicznymi. W większości przypadków, dla uzyskania rozwiązania tak postawionego problemu, konieczne jest sięgnięcie po zaawansowane metody numeryczne. Ze względu na praktyczne zapotrzebowanie dla tego

typu rozwiązań, w ostatnich kilkunastu latach zostały opracowane bardzo rozbudowane komercyjne programy nazwane programami CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Jednym z najważniejszych elementów całego procesu modelowania jest weryfikacja doświadczalna uzyskanych wyników. Do tego celu są szczególnie przydatne metody oparte na użyciu znaczników promieniotwórczych.

W Polsce rozwojem i zastosowaniem metod z użyciem znaczników promieniotwórczych (nie dotyczy to zastosowań medycznych) zajmuje się głównie zespół z Instytutu Chemii i Techniki Jądrowej w Warszawie (Chmielewski i in. 1988, Chmielewski i in. 1997, Chmielewski i in. 1998, Chmielewski i in. 2001, Palige i in. 2006) oraz zespoły z AGH w Krakowie (Lenda i Zuber 1970, Zuber 1970, Kreft i in. 1974, Zuber 1974, Kreft i Zuber 1978, Furman i in. 1987, Furman i in. 2003, Furman i in. 2005, Petryka i in. 1993, Przewłocki i in. 1990, Przewłocki i in. 1996, Stęgowski 1993, Stęgowski 2001, Stęgowski 2002, Stęgowski i Leclerc 2002, Stęgowski 2004, Stęgowski i Furman 2004, Stęgowski i in. 2004, Stęgowski i Nowak 2007, Stęgowski i in. 2010). Autor niniejszej pracy od ponad dwudziestu lat bierze czynny udział w przeprowadzaniu badań z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych. Oprócz rozwoju technik i metod tych pomiarów istotnym elementem jego pracy był rozwój metod analizy danych i modelowania układów przepływowych. W ostatnich latach zainteresowania autora zostały skierowane na zastosowanie symulacji CFD do modelowania przepływów i ich weryfikację doświadczalną. Wykonywane przez autora prace prowadzone były między innymi przy międzynarodowej współpracy z takimi ośrodkami jak: ANSTO – Australia (Baguley i in. 1988), FORCE – Instytut w Danii, PROGEPI – Nancy we Francji (Furman i in. 2005, Stęgowski i Leclerc 2002) oraz Międzynarodową Agencją Energii Atomowej w Wiedniu (Björnstad i in. 2001, Stęgowski i in. 2004). Oprócz publikacji i prezentacji wyników prac autora na konferencjach krajowych i międzynarodowych, znaczna część wyników tych badań została zamieszczona w monografiach (Iller i Thyn 1994 i Dziunikowski 1998).

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie aktualnej metodologii modelowania technologicznych układów przepływowych w powiązaniu z eksperymentami wykonywanymi przy użyciu znaczników promienio-

twórczych. Wszystkie wyniki badań zamieszczone w prezentowanej pracy są wynikami uzyskanymi wyłącznie przez autora lub w ramach prac zespołowych, w których udział autora był istotny.

W pierwszej części pracy zostały przedstawione podstawy teoretyczne badań znacznikowych w kontekście opisu układów przepływowych poprzez funkcję rozkładu czasu przebywania. Omówione tam są podstawowe fenomenologiczne modele przepływu o uśrednionych parametrach oraz numeryczne metody stosowane dla tego typu modelowania. W ostatniej części rozdziału zostały przedstawione wyniki badań znacznikowych dla wybranych układów przepływowych wraz z zastosowanymi modelami opisującymi te układy.

W drugiej części omówiono podstawy teoretyczne stosowane w symulacjach CFD dla przepływów jedno i wielofazowych. Szczegółowo przedstawione są wyniki symulacji dla procesu klasyfikacji cząstek fazy stałej w hydrocyklonie. W końcowej części rozdziału przedstawiono porównanie wyników symulacji z wynikami doświadczalnymi uzyskanymi w pomiarach znacznikowych. Oprócz tego pokazano również możliwości predykcji pracy hydrocyklonu poprzez zastosowanie metody CFD. Zarówno w rozdziale drugim jak i trzecim modelowanie układów przepływowych zastało przeprowadzone dla wybranych procesów wzbogacania rud miedzi. Wybór ten spowodowany został wieloletnim zaangażowaniem autora w tą dziedzinę badań.

W ostatniej części pracy zostało przedstawione autorskie rozwiązanie zastosowania sztucznych sieci neuronowych do analizy widm promieniowania gamma badanych za pomocą detektorów scyntylicyjnych. Opracowana metoda pozwala na równoczesne zastosowanie różnych izotopów promieniotwórczych w badaniach znacznikowych. Praktyczne zastosowanie tej metody zostało zobrazowane przykładem badania procesu dyfuzji metali w stalach.

1. Modelowania fenomenologiczne układów przepływowych w powiązaniu z badaniami znacznikowymi

1.1. Układy przepływowe

Układ przepływowy jest to wydzielony obszar przestrzeni, w którym następuje przepływ określonego medium. Medium może stanowić jedna faza lub mieszanina kilku faz (np. ciecz, gaz, pyły, hydromieszanki, zawiesiny). Układy te powszechnie występują zarówno w środowisku naturalnym jak i w wielu procesach przemysłowych. Poznanie i opis przepływów występujących w przyrodzie ma istotne znaczenie poznawcze. W przypadku układów przemysłowych opis przepływu, oprócz znaczenia poznawczego, posiada istotny aspekt technologiczny. Dynamika przepływu występującego w przemysłowych układach przepływowych (np. reaktorach chemicznych) jest jednym z parametrów decydujących o efektywności danego procesu. W prezentowanej pracy analiza takich układów została przedstawiona na przykładzie badań procesów wzbogacania rud miedzi.

Podstawowymi parametrami opisującymi układ przepływowy są jego objętość efektywna V (przez którą następuje przepływ) oraz objętościowe natężenie przepływu Q (objętość medium przepływającego przez układ na jednostkę czasu). Powszechnie stosowanym parametrem łączącym te dwie wielkości jest średni czas przebywania τ wyrażony zależnością

$$\tau = \frac{V}{Q} \quad (1.1)$$

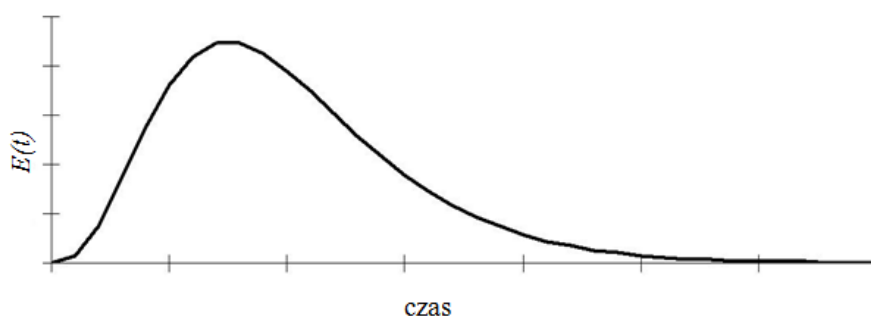
Drugim istotnym czynnikiem charakteryzującym układ przepływowy jest intensywność mieszania się medium przepływającego poprzez rozpatrywany układ. Mieszanie może być wynikiem różnych procesów fizycznych zachodzących wewnątrz rozpatrywanego systemu. W przypadku laminarnych przepływów płynów mieszanie jest wynikiem zjawiska dyfuzji molekularnej. Dla przepływów burzliwych dominująca jest tak zwana dyfuzja turbulentna. Z tego typu przepływami mamy najczęściej do

czynienia zarówno w przypadku płynów jak i mieszanin wielofazowych. Dla niektórych układów przemysłowych dyfuzja turbulentna jest silnie wzmacniana poprzez mechaniczne mieszanie materiału wewnątrz układu. Ze względu na fizyczną złożoność tych procesów intensywność mieszania nie jest jednoznacznie zdefiniowana w sposób ilościowy. Ilościowe wyrażenie intensywności mieszania zależy od matematycznego sposobu opisu tego zjawiska lub przyjętego modelu matematycznego. Modele przepływu o uśrednionych parametrach są przedstawione w dalszych częściach tego rozdziału.

1.2. Opis układu przepływowego poprzez funkcję rozkładu czasu przebywania

Jednym z wielu zastosowań metod znacznikowych (Dziunikowski 1998) jest badanie układów przepływowych, a w szczególności doświadczalne wyznaczenie funkcji rozkładu czasu przebywania. Tak jak we wszystkich tego typu pomiarach znacznik musi się wyróżniać dwoma istotnymi cechami. W badaniach interesuje nas przepływ danego medium a nie znacznika, dlatego też zachowanie się znacznika w procesach zachodzących w układzie powinno być identyczne jak zachowanie elementów danego medium lub wybranej jego fazy. Z drugiej strony znacznik musi się wyróżniać mierzalną cechą pozwalającą na śledzenie jego przemieszczania się w układzie. Istotnym zagadnieniem jest także minimalizacja zaburzania przepływu spowodowanego wykonywaniem pomiarów znacznikowych. Aby uczynić zadość tym wymaganiom, należy odpowiednio dobrać postać i ilość znacznika, sposób wprowadzania go do badanego układu oraz pomiaru jego stężenia. Szczególnym rodzajem znaczników są znaczniki promieniotwórcze. Cechą wyróżniającą te znaczniki jest emisja promieniowania jądrowego. Do znakowania najczęściej stosowane są izotopy promieniotwórcze emitujące promieniowanie gamma. Stosunkowo łatwy pomiar tego promieniowania jest istotną zaletą pomiarów z użyciem znaczników promieniotwórczych. Celem pomiarów znacznikowych jest wyznaczenie funkcji rozkładu czasu przebywania $E(t)$ dla wybranej fazy przepływającej przez badany układ. Funkcja $E(t)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa czasu przebywania

elementów danej fazy w układzie. Funkcja ta pozwala określić, jaki jest rozkład czasu przebywania cząstek przepływającego medium wewnątrz układu. W przypadku braku doświadczalnych możliwości pomiaru lokalnych wielkości charakteryzujących przepływ w układzie, zgodnie z koncepcją Danckvertsa (Danckverts 1953), funkcja $E(t)$ stanowi podstawę do opisu i wyznaczenia uśrednionych parametrów charakteryzujących przepływ. Funkcja ta często określana jest poprzez skrót RTD pochodzący od angielskiej nazwy *Residence Time Distribution*. Przykładowy kształt takiej funkcji przedstawiony jest na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Przykładowa postać funkcji rozkładu czasu przebywania

Funkcja ta jest znormalizowana zgodnie z zależnością

$$\int_0^{\infty} E(t) dt = 1 \quad (1.2)$$

Parametryczny opis tej funkcji jest analogiczny jak w rachunku prawdopodobieństwa, czyli oparty na metodzie momentów. Podstawowe parametry to:

średni czas przebywania τ

$$\tau = \int_0^{\infty} t \cdot E(t) dt = \frac{V}{Q} \quad (1.3)$$

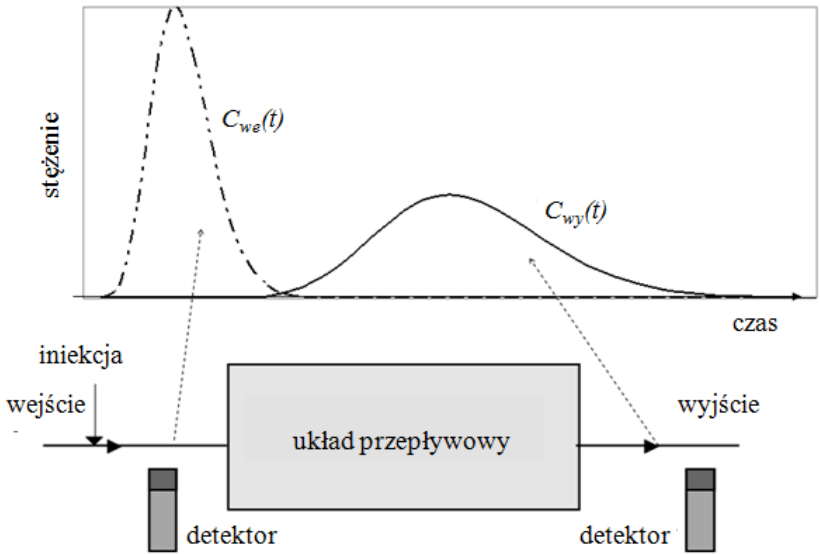
gdzie:

- V – objętość układu dostępna dla przepływu,
- Q – objętościowe natężenie przepływu.

oraz wariancja czasu przebywania var

$$var = \int_0^{\infty} (t - \tau)^2 E(t) dt \quad (1.4)$$

W pomiarach znacznikowych najczęściej wprowadza się znacznik na wejściu układu oraz dokonuje się pomiaru rozkładu czasowego stężenia znacznika wprowadzanego do układu $\{C_{we}(t)\}$ jak i na jego wyjściu $\{C_{wy}(t)\}$. W przypadku znaczników promieniotwórczych bezpośrednio dokonywany jest pomiar częstości zliczeń fotonów γ emitowanych przez izotop i rejestrowanych przez detektor. Aby przeliczyć te częstości na stężenie znacznika należy dokonać kalibracji zastosowanych układów pomiarowych. Ideowy schemat pomiarów z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych przedstawiony jest na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Idea pomiaru z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych

Funkcje $C_{we}(t)$ i $C_{wy}(t)$ są podstawą do wyznaczenia funkcji $E(t)$. Przepływ znacznika w układzie możemy opisać poprzez rozkład czasowy jego stężenia przestrzennego (*volume concentration*) lub stężenia transportowego (*flux concentration*) (Kreft i Zuber 1978). Funkcja $E(t)$ jest bezpośrednio związana z opisem przepływu poprzez stężenie transportowe. Stężenie transportowe jest to ilość znacznika zawarta w jednostce objętości i przepływająca przez dany przekrój na jednostkę czasu. Jeżeli na wejściu i na wyjściu układu mierzone jest stężenie transportowe (Kreft 1983), to rozkłady $C_{we}(t)$ i $C_{wy}(t)$ są powiązane całką spłotu

$$C_{wy}(t) = \int_0^t E(u)C_{we}(t-u)du \quad (1.5)$$

W przypadku, kiedy iniekcja znacznika do układu jest stosunkowo szybka i funkcję $C_{we}(t)$ możemy potraktować jako impulsową, funkcję $E(t)$ możemy wyrazić bezpośrednio z funkcji $C_{wy}(t)$ poprzez jej normalizację

$$E(t) = \frac{C_{wy}(t)}{\int_0^{\infty} C_{wy}(t)dt} \quad (1.6)$$

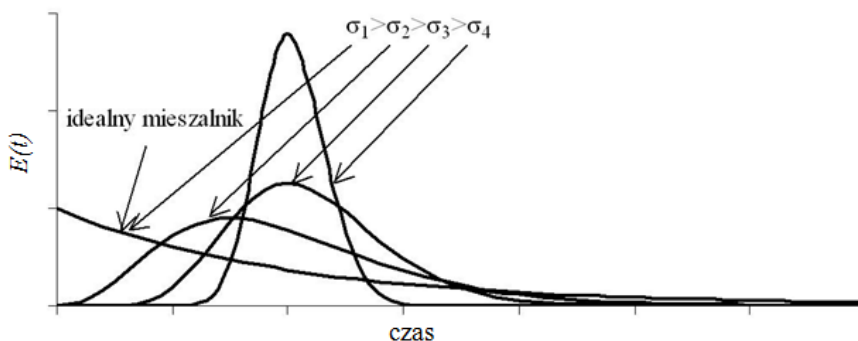
W metodzie pomiarów przedstawionej na rysunku 1.2 funkcje $C_{we}(t)$ i $C_{wy}(t)$ dotyczą stężenia przestrzennego i w ogólnym przypadku nie można bezpośrednio zastosować zależności (1.5) i (1.6) do wyznaczenia funkcji $E(t)$. Dokładne omówienie tych zagadnień oraz ich rozwiązania przedstawione są w pracach Krefta i Zubera (1978) oraz Krefta (1983). W układach przemysłowych mamy najczęściej do czynienia z takimi uwarunkowaniami fizycznymi, dla których w punktach pomiarowych, czyli w strumieniu wpływającym i wypływającym układu, stężenie transportowe znacznika jest równe stężeniu przestrzennemu. Taki układ nazywamy „zamknięty-zamknięty” (Iller i Thyn 1994, Charlton i in. 1990) i w takich przypadkach można stosować zależności (1.5) i (1.6) do wyznaczenia funkcji $E(t)$. Pod pojęciem układu „zamknięty-zamknięty” należy rozumieć układ, dla którego nie ma możliwości przepływu cząstek płynu z wnętrza

układu do strumienia wpływającego oraz ze strumienia wypływającego do wnętrza układu.

Pierwiastek z wariancji w rachunku prawdopodobieństwa nazywany jest odchyleniem standardowym

$$\sigma = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{\int_0^{\infty} (t - \tau)^2 E(t) dt} \quad (1.7)$$

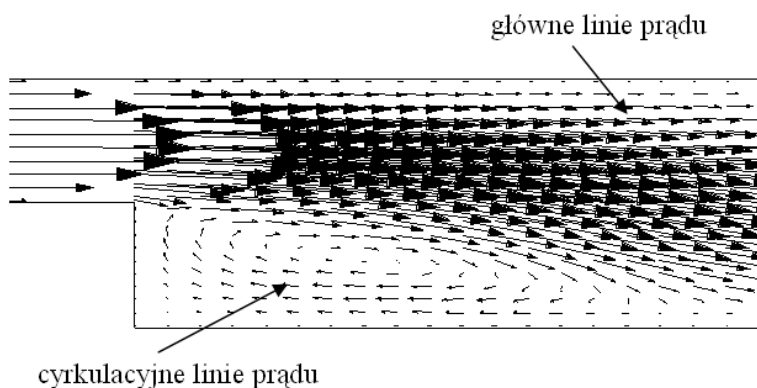
W przypadku funkcji rozkładu czasu przebywania $E(t)$ parametr ten stosowany jest do ilościowego opisu intensywności mieszania materiału w układzie przepływowym. Często w literaturze nazywany jest rozmyciem (*spread*) czasu przebywania badanej fazy w układzie. Przykładowe funkcje $E(t)$ dla takiej samej wartości średniego czasu przebywania, ale różnych wartości odchylenia standardowego przedstawiono na rysunku 1.3.



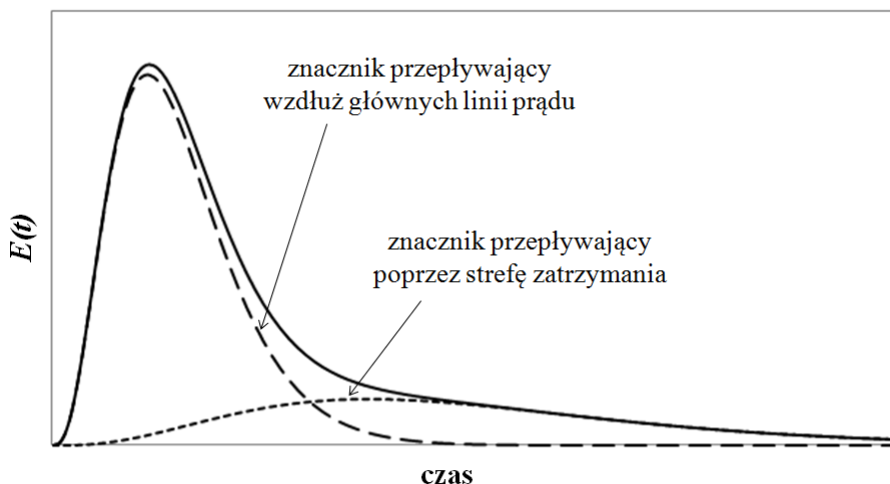
Rys. 1.3. Przykładowe funkcje $E(t)$ dla różnych wartości odchylenia standardowego

Wraz ze wzrostem stopnia intensywności mieszania rośnie współczynnik σ . Współczynnik ten zależy nie tylko od intensywności mieszania, ale również od rozkładu pola prędkości przepływu w układzie. Dla małych intensywności mieszania na wartość współczynnika σ wpływają głównie duże niejednorodności rozkładu pola prędkości. Przepływy silnie turbulentne powodują zarówno dużą intensywność

mieszania jak i ujednorodnienie prędkości przepływu. W takim przypadku wartość współczynnika σ zależy głównie od intensywności mieszania turbulentnego. Opis układu przepływowego poprzez wyznaczenie doświadczalnego rozkładu czasu przebywania $E(t)$, a nawet tylko jego podstawowych parametrów τ i σ , może być w wielu przypadkach wystarczający z punktu widzenia założonego celu badań. Przykład takiego zastosowania pomiarów znacznikowych przedstawiony jest w rozdziale 1.4.3 dotyczącym badań maszyn flotacyjnych.



Rys. 1.4. Przykład układu przepływowego ze strefą zatrzymania

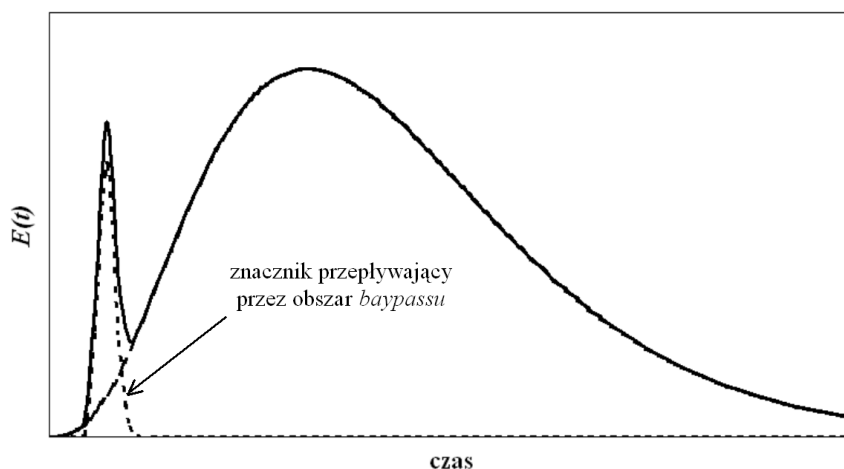


Rys. 1.5. Przykład funkcji $E(t)$ dla układu ze strefą zatrzymania

Przedstawione na rysunku 1.3 krzywe rozkładów czasu przebywania otrzymujemy dla układów gdzie nie występują strefy zatrzymania. Natomiast intensywność mieszania lub niejednorodność rozkładu prędkości powodują większe lub mniejsze rozmycie czasu przebywania materiału w układzie. Często w układach występują obszary, gdzie linie prądu (dla przepływu laminarnego) lub linie prądu prędkości średnich (dla przepływu turbulentnego) są zamknięte.

Przykład takiej sytuacji przedstawiony jest na rysunku 1.4. W takim przypadku większa część materiału przepływa wzdłuż głównych linii prądu, natomiast część materiału, poprzez dyfuzję molekularną lub turbulentną, przechodzi do obszaru, gdzie linie prądu są zamknięte (przepływ cyrkulacyjny). W obszarze tym prędkości przepływu są znacznie mniejsze, a w konsekwencji czas przebywania znacznie dłuższy. Obszar taki nazywany jest obszarem zatrzymania lub długiego czasu przebywania. Dla takiego układu funkcja rozkładu czasu przebywania przyjmuje kształt przedstawiony na rysunku 1.5. Dla takiego przepływu możliwe jest rozdzielenie funkcji $E(t)$ na dwie składowe i określenie parametrów przepływu w obu wydzielonych obszarach.

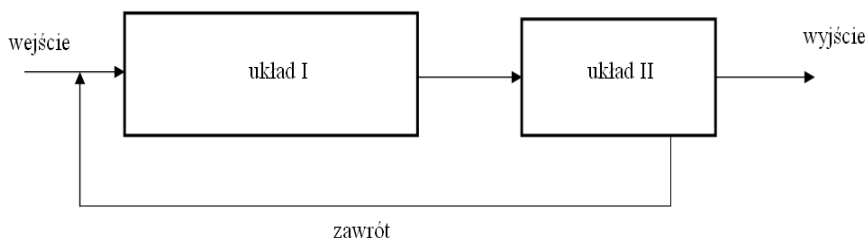
Innym przypadkiem jest występowanie w układzie tak zwanego *bypassu*. Jest to sytuacja gdzie w układzie występuje uprzywilejowany obszar przepływu pomiędzy wejściem a wyjściem układu.



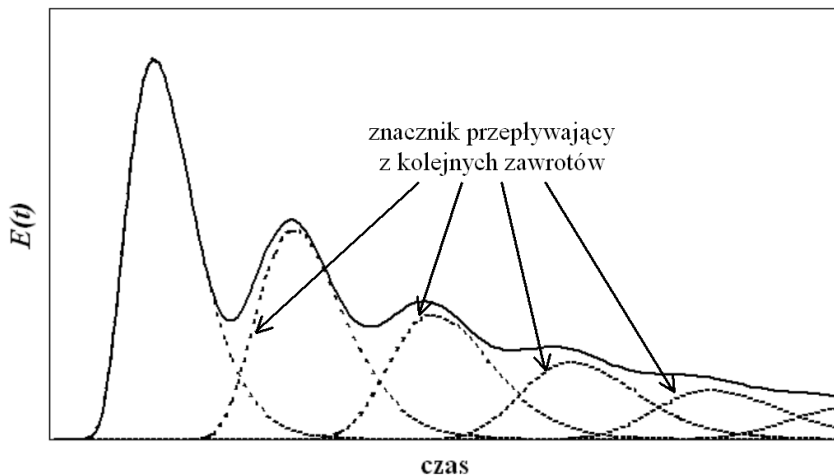
Rys. 1.6. Przykład funkcji $E(t)$ dla układu z *bypass-em*

Obszar ten charakteryzuje się stosunkowo szybkim przepływem, małym rozmyciem czasu przebywania i małą ilością przepływającego materiału. Rysunek 1.6 przedstawia funkcję rozkładu czasu przebywania dla takiego układu.

W złożonych systemach przepływowych występują układy z zawrotami. Najprostszy taki system składający się z dwóch fizycznie rozdzielonych układów przedstawia rysunek 1.7. W takim systemie materiał najpierw przepływa przez pierwszy układ i podawany jest na wejście drugiego układu. Drugi układ posiada dwa wyjścia. Jedno z tych wyjść stanowi wyjście materiału z całego systemu natomiast materiał z wyjścia drugiego podawany jest na wejście pierwszego układu.



Rys. 1.7. Schemat układu z zawrotem



Rys. 1.8. Przykład funkcji $E(t)$ dla układu z zawrotem

Przykładowy kształt funkcji rozkładu czasu przebywania dla takiego układu pokazano na rysunku 1.8. W takim przypadku oprócz parametrów charakteryzujących przepływ w poszczególnych układach istotne jest wyznaczenie ilości materiału zawracanego z układu drugiego do pierwszego. Ilościowy sposób analizy wymienionych przypadków przepływu został omówiony w kolejnych rozdziałach wraz z przedstawieniem danych doświadczalnych.

1.3. Modele przepływu o parametrach uśrednionych

1.3.1 Model dyfuzji turbulentnej

Pod pojęciem modelu przepływu o parametrach uśrednionych (skupionych) należy rozumieć model, który opisuje przepływ za pomocą co najwyżej kilku parametrów. Wartości tych parametrów są uśrednionymi wielkościami charakteryzującymi przepływ w układzie lub jego wybranymi częściami. Modele pozwalające na lokalną charakterystykę przepływu w układzie są przedstawione w rozdziale 2.

Jednym z bardziej rozpowszechnianych modeli opisu transportu materiału w układach przepływowych jest model dyfuzji turbulentnej (*eddy diffusion*). W przepływach turbulentnych podstawowym czynnikiem powodującym wymianę cząstek przepływającego medium są ciągle tworzące się i zanikające wiry. Proces tworzenia i zanikania tych wirów ma charakter stochastyczny, co uzasadnia postulat jego analogii do dyfuzji molekularnej. W modelu tym gęstość strumienia dyfuzji turbulentnej „oznaczonego” składnika medium zależy od wartości współczynników dyfuzji turbulentnej oraz gradientu stężenia tego składnika i wyraża się zależnością

$$\vec{J}_D = -\overline{\overline{D}} \cdot \nabla C \quad (1.8)$$

gdzie:

- \vec{J}_D – gęstość strumienia dyfuzji turbulentnej,
- $\overline{\overline{D}}$ – tensor współczynników dyfuzji turbulentnej,
- C – stężenie „oznaczonego” składnika medium.

Od strony matematycznej model ten jest analogiczny do modelu dyfuzji molekularnej opisanego prawami Ficka. W przypadku dyfuzji molekularnej zależność (1.8) jest uzasadniona teoretycznie. Dla dyfuzji turbulentnej zależność ta sprawdziła się w wielu doświadczeniach i jest powszechnie stosowana do matematycznego opisu procesów przepływu. Dyfuzja turbulentna wywołana jest przez ruch płynu lub mieszaniny, a w konsekwencji związana jest z wartościami i rozkładem pola prędkości przepływu oraz właściwościami fizycznymi przepływającego medium. Z tych względów w opisie takiego przepływu musimy uwzględnić zarówno równanie dyfuzji turbulentnej jak i równanie adwekcji. Dla przepływów ustalonych, dla których rozkład pola prędkości średnich $u(x,y,z)$ jest stały w czasie, otrzymujemy następujące równanie ciągłości przepływu

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} + u(x, y, z) \cdot \nabla C(x, y, z, t) - \nabla \left(\overline{D(x, y, z)} \cdot \nabla C(x, y, z, t) \right) = 0 \quad (1.9)$$

Niezależnie od warunków brzegowych i początkowych rozwiązanie równania (1.9) wymaga znajomości rozkładu pola prędkości średniej oraz rozkładu pola tensora dyfuzji turbulentnej. Wyznaczenie tych pól wymaga zastosowania odpowiednich modeli opisujących przepływy turbulencje oraz metod ich rozwiązywania. Opracowane w ostatnich latach modele a zwłaszcza programy numeryczne pozwalają na takie rozwiązania, co zostanie przedstawione w rozdziale 2. W większości dotychczasowych zastosowań model dyfuzji turbulentnej sprowadza się do przypadku jednowymiarowego ze stałym współczynnikiem dyfuzji turbulentnej D i stałą prędkością średnią u . W takim przypadku równanie (1.9) przyjmuje postać

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - D \cdot \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.10)$$

Pomimo tak znacznych uproszczeń model ten bardzo dobrze sprawdza się dla układów o symetrii osiowej, w których przepływ

występuje wzdłuż osi symetrii, długość układu jest dużo większa od wymiarów jego przekroju, duża intensywność turbulencji powoduje ujednorodnienie profilu prędkości oraz ujednorodnienie rozkładu stężenia znacznika w przekrojach poprzecznych do osi układu. W pomiarach znacznikowych istotne są dwa punkty na osi x (rys. 1.9): punkt wprowadzenia znacznika ($x=0$) i punkt pomiaru rozkładu jego stężenia w czasie ($x=L$). Z tych względów równanie (1.10) jest często przekształcane do postaci bezwymiarowej

$$\frac{\partial C(z, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial C(z, \theta)}{\partial z} - \frac{1}{Pe} \cdot \frac{\partial^2 C(z, \theta)}{\partial z^2} = 0 \quad (1.11)$$

Równanie to uzyskujemy poprzez wprowadzenie następujących zależności

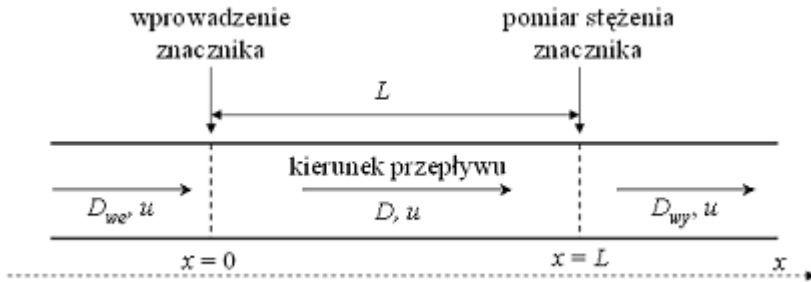
$$z = \frac{x}{L} \text{ – zmienna bezwymiarowa, znormalizowana do długości } L,$$

$$\tau = \frac{L}{u} \text{ – średni czas przepływu,}$$

$$\theta = \frac{t}{\tau} \text{ – bezwymiarowy czas, znormalizowany do średniego czasu przepływu,}$$

$$Pe = \frac{uL}{D} \text{ – liczba Pecleta (liczba bezwymiarowa).}$$

Na rysunku 1.9 pokazano trzy obszary przestrzenne jednowymiarowego modelu dyfuzji turbulენტnej. Pierwszy to obszar przed wprowadzeniem znacznika, drugi to obszar pomiędzy punktem wprowadzenia znacznika a punktem pomiaru i trzeci poza punktem pomiaru. Obszary te charakteryzują się odpowiednio współczynnikiem dyfuzji turbulენტnej D_{we} , D i D_{wy} . Rozwiązanie równania (1.11) zależy od zadanych warunków brzegowych i początkowych oraz założonych zależności dla współczynników dyfuzji D_{we} , D_{wy} i D .



u – średnia prędkość przepływu,
 D – współczynnik dyfuzji turbulentnej.

Rys. 1.9. Schemat jednowymiarowego modelu dyfuzji turbulentnej

Najczęściej model ten stosowany jest przy założeniu następujących warunków na wartości współczynników dyfuzji:

$D_{we} = D_{wy} = D$	„układ otwarty-otwarty”
$D_{we} = 0$ i $D_{wy} = D$	„układ zamknięty-otwarty”
$D_{we} = D$ i $D_{wy} = 0$	„układ otwarty-zamknięty”
$D_{we} = 0, D_{wy} = 0$	„układ zamknięty-zamknięty”

W badaniach znacznikowych celem jest identyfikacja przepływu i ewentualnie weryfikacja proponowanego modelu oraz wyznaczenie wartości jego parametrów. Ponieważ równanie (1.11) spełnione jest zarówno dla stężenia przestrzennego jak i transportowego, przy rozwiązywaniu tego równania należy odpowiednio zdefiniować to stężenie oraz warunki graniczne. Dokładne teoretyczne rozważania na ten temat wraz z rozwiązaniami znajdują się w pracy Krefta (1983). Monograficzne opracowanie zagadnień rozwiązania równania (1.10) dla różnych warunków brzegowych i początkowych znajduje się także w pracach Illera i Thyna (1994) oraz Thyna i in. (2000). W większości badań znacznikowych wykonywany jest pomiar rozkładu stężenia przestrzennego znacznika. W takim przypadku rozwiązanie równania (1.11) dla układu „otwarty-otwarty” i planarnej iniekcji znacznika (Levenspiel 1999), ma postać analityczną

$$C(\theta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pe}{\pi \cdot \theta}} \cdot \exp\left(-\frac{Pe \cdot (1-\theta)^2}{4 \cdot \theta}\right) \quad (1.12)$$

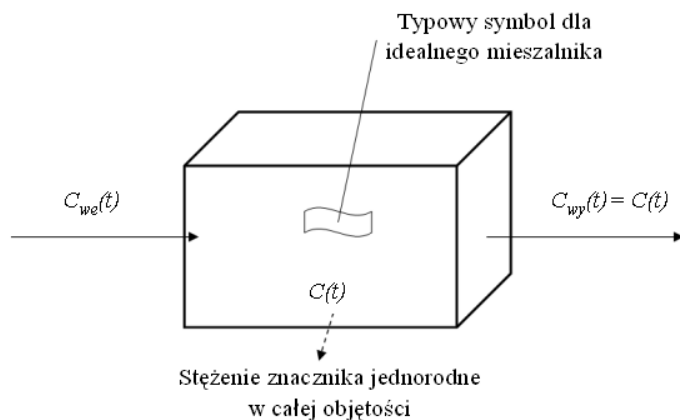
Jednowymiarowy model dyfuzji turbulentnej jest modelem dwuparametrowym. Parametrami tymi są średnia prędkość przepływu u oraz współczynnik dyfuzji turbulentnej D . Często zamiast tej pary parametrów stosuje się średni czas przepływu τ oraz liczbę Pecleta Pe , które z poprzednimi parametrami związane są poprzez odległość L . W przypadku rozwiązania (1.12), które jest rozwiązaniem dla stężenia przestrzennego, przedstawiona funkcja nie jest tożsama z funkcją rozkładu czasu przebywania $E(t)$. W przypadku układów przemysłowych (z wyłączeniem rurociągów transportujących) fizyczny charakter zarówno wejścia do układu jak i jego wyjścia daje najczęściej podstawy do przyjęcia warunków odpowiadających układowi „zamknięty-zamknięty”. Dla takich warunków równanie (1.11) nie posiada rozwiązania analitycznego i należy je rozwiązać numerycznie lub w dziedzinie transformaty Laplace’a. W tym przypadku uzyskane rozwiązanie jest tożsame z funkcją rozkładu czasu przebywania $E(t)$.

Współczynnik dyfuzji turbulentnej D uogólniany jest również na procesy, gdzie zachowanie elementów lub cząstek przepływającego medium ma charakter stochastyczny, tak jak w przepływie turbulentnym płynów. Do takich procesów możemy zaliczyć przepływ cieczy w ośrodkach porowatych oraz burzliwe przepływy mieszanin gaz-cząstki fazy stałej lub ciecz-cząstki fazy stałej (Bhusarapu i in. 2004, Yianatos i in. 2005, Van de Velden i in. 2007). W tym przypadku model opisany równaniem (1.10) nazywany jest jednowymiarowym modelem dyspersyjnym (*axial dispersion model*) a współczynnik D dyspersją.

1.3.2. Modele komorowe

Kolejnymi powszechnie stosowanymi modelami do opisu przepływu są modele komorowe, dla których wyjściowym modelem jest model idealnego mieszalnika (komory). Modele te są stosowane zarówno w inżynierii procesowej (Iller i Thyn 1994) jak i modelowaniu przepływów

w środowisku naturalnym (Szymkiewicz 2000). W modelu idealnego mieszalnika zakłada się bardzo dużą intensywność mieszania w całej objętości układu. Teoretycznie oznacza to, że w danym czasie stężenie znacznika jest jednorodne w całej objętości układu i tym samym równe stężeniu znacznika na wyjściu z układu (rys. 1.10).



Rys. 1.10. Schemat idealnego mieszalnika

Z bilansu masy znacznika wprowadzanego do układu i wypływającego z niego otrzymujemy równanie

$$V \frac{dC_{wy}(t)}{dt} = Q \cdot [C_{we}(t) - C_{wy}(t)] \quad (1.13)$$

lub

$$\frac{dC_{wy}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot [C_{we}(t) - C_{wy}(t)] \quad (1.14)$$

Dla impulsowego wprowadzenia znacznika, czyli zakładając

$$C_{we}(t) = \frac{m}{Q} \cdot \delta(t) \quad (1.15)$$

gdzie:

m – masa znacznika,

$\delta(t)$ – funkcja delta Diracka.

rozwiązanie równania (1.13) przyjmuje postać

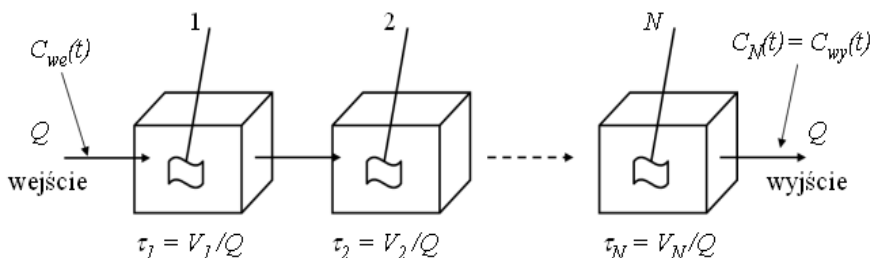
$$C_{wy}(t) = \frac{m}{Q \cdot \tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.16)$$

Dokonując normalizacji tego równania zgodnie z równaniem (1.6) otrzymujemy analityczną postać funkcji rozkładu czasu przebywania dla modelu idealnego mieszalnika

$$E(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.17)$$

Model idealnego mieszalnika (pojedynczej komory) jest podstawą do tworzenia bardziej złożonych modeli opisujących przepływ badanych układów. Przykładami takich modeli są: model komorowy szeregowo połączonych mieszalników, model z mieszaniem wstecznym, model z dodatkową komorą wymiany.

Model komorowy szeregowo połączonych mieszalników przedstawiony jest schematycznie na rysunku 1.11. W modelu tym materiał przepływa kolejno przez komory, które mogą się charakteryzować różnymi objętościami, co przy takim samym natężeniu przepływu powoduje różne wartości średnich czasów przebywania w tych komorach.



Rys. 1.11. Model szeregowo połączonych idealnych mieszalników

Model ten opisuje następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}
 \text{pierwsza komora} \quad \frac{dC_1(t)}{dt} &= \frac{1}{\tau_1} \cdot (C_{we}(t) - C_1(t)) \\
 \text{druga komora} \quad \frac{dC_2(t)}{dt} &= \frac{1}{\tau_2} \cdot (C_1(t) - C_2(t)) \\
 &\quad (1.18) \\
 \text{\textit{i}-ta komora} \quad \frac{dC_i(t)}{dt} &= \frac{1}{\tau_i} \cdot (C_{i-1}(t) - C_i(t))
 \end{aligned}$$

$\tau_i = Q/V_i$ – średni czas przebywania w i -tej komórce,
 V_i – efektywna objętość i -tej komory.

Model taki jest modelem i -parametrowym, gdzie parametrami są wartości średniego czasu przebywania dla poszczególnych komór. Jeżeli znamy natężenie przepływu Q to parametrami modelu są objętości poszczególnych komór.

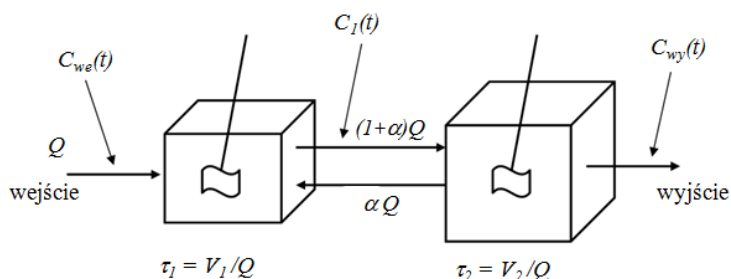
Często stosowanym uproszczeniem tego modelu jest założenie takich samych wartości objętości poszczególnych komór. W konsekwencji otrzymujemy model dwuparametrowy, gdzie parametrami są średni czas przebywania dla pojedynczej komory τ_o oraz liczba komór N . W takim przypadku rozwiązując układ równań (1.18) dla wymuszenia impulsowego i dokonując jego normalizacji zgodnie z równaniem (1.3) otrzymujemy następującą postać funkcji rozkładu czasu przebywania (Himmelblau i Bischoff 1968)

$$E(t) = \left(\frac{1}{\tau_o} \right)^N \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \exp\left(-t/\tau_o\right) \quad (1.19)$$

Średni czas przebywania dla takiego modelu jest równy:

$$\tau = N \cdot \tau_o \quad (1.20)$$

Model z mieszaniem wstecznym jest rozbudowanym modelem szeregowo połączonych mieszalników. W modelu tym zakłada się występowanie wstecznego przepływu materiału pomiędzy sąsiednimi komorami. Model ten znajduje zastosowanie do opisu układów, w których obszary o dużym stopniu mieszania (np. szeregowo połączone mieszalniki mechaniczne) nie są fizycznie rozdzielone i może pomiędzy nimi występować wsteczny przepływ. Na rysunku 1.12 przedstawiono schemat takiego dwukomorowego modelu.



Rys. 1.12. Schemat modelu komorowego ze wstecznym mieszaniem

Model taki opisany jest przez następujący układ dwu równań różniczkowych

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [C_{we}(t) - (1 + \alpha) \cdot C_1(t) + \alpha \cdot C_{wy}(t)] \quad (1.21)$$

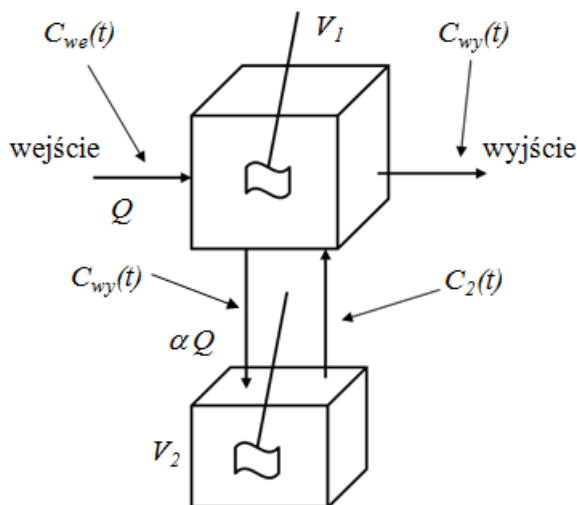
$$\frac{dC_{wy}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} \cdot (1 + \alpha) \cdot [C_1(t) - C_{wy}(t)]$$

Jest to model trójparametrowy o parametrach τ_1 , τ_2 i α gdzie:

τ_1 , τ_2 – średni czas przebywania odpowiednio dla pierwszej i drugiej komory,

α – współczynnik opisujący udział części materiału zawracającego z komory drugiej do pierwszej.

W modelu z dodatkową komorą wymiany, część materiału z komory głównej przepływa do komory wymiany, gdzie po wymieszaniu wraca do komory głównej (rys. 1.13). Model ten bardzo dobrze nadaje się do modelowania układów, gdzie występują strefy zatrzymania (długiego czasu przebywania) omówione w rozdziale 1.2.



Rys. 1.13. Schemat modelu z komorą wymiany

Model ten opisany jest przez układ dwóch równań różniczkowych

$$\frac{dC_{wy}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1} \cdot [C_{we}(t) - (1 + \alpha)C_{wy}(t) + \alpha C_2(t)] \quad (1.22)$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_2} \cdot [C_{wy}(t) - C_2(t)]$$

Jest to model trójparametrowy o parametrach τ_1 , τ_2 i α gdzie:

- τ_1 – średni czas przebywania w głównej komorze,
- τ_2 – średni czas przebywania w komorze wymiany,
- α – współczynnik opisujący udział części materiału przepływającego poprzez komorę wymiany.

W wielu praktycznych przypadkach, aby uzyskać zgodność modelu z danymi doświadczalnymi należy do modeli komorowych dodać tak zwany model przepływu tłokowego (model opóźnienia transportowego lub przepływu adwekcyjnego). Model przepływu tłokowego zakłada całkowity brak dyspersji czasu przebywania przepływającego materiału w układzie. Teoretycznie oznacza to całkowity brak mieszania materiału w układzie oraz jednorodny rozkład prędkości przepływu. W modelu tym funkcja rozkładu stężenia znacznika na wyjściu $C_{wy}(t)$ ma identyczny kształt jak funkcja rozkładu stężenia znacznika na wejściu $C_{we}(t)$, jest tylko przesunięta o czas T zwany opóźnieniem transportowym, czyli

$$C_{wy}(t) = C_{we}(t - T) \quad (1.23)$$

Na bazie wyżej przedstawionych modeli można tworzyć jeszcze bardziej rozbudowane modele poprzez wprowadzanie pomiędzy nimi połączeń szeregowych, równoległych lub sprzężeń zwrotnych. Podobnie jak model dyspersyjny modele komorowe stosowane są do opisu przepływów płynów jak i burzliwych przepływów mieszanin wielofazowych takich jak ciecz-cząstki fazy stałej (Weller i in. 2000, Pareek i in. 2001, Yianatos i in. 2001, Stegowski i Leclerc 2002, Stegowski i Furman 2004, Mitsutani i in. 2005, Yianatos i in. 2005).

1.3.3. Analityczne i numeryczne metody modelowania

Doświadczalne funkcje, uzyskane z pomiarów znacznikowych, pozwalają na weryfikację i wyznaczenie parametrów modelu przepływu dla badanego układu. W drugiej połowie ubiegłego wieku nastąpił duży rozwój zastosowań znaczników promieniotwórczych w badaniach przemysłowych. Ze względu na bardzo ograniczone możliwości stosowania w tym czasie zaawansowanych metod komputerowych do wyznaczenia parametrów modeli stosowano proste metody graficzne lub metodę momentów (Iller i Thyn 1994). Dla prostych modeli dwuparametrowych takich jak jednowymiarowy model dyfuzji turbulentnej lub model szeregowo połączonych jednakowych idealnych mieszalników, parametry tych modeli wyznaczone były z pierwszego momentu głównego oraz drugiego

momentu centralnego. W przypadku modelu dyfuzji turbulentnej opisanego rozwiązaniem (1.12), zależności te są następujące

$$\int_0^{\infty} t \cdot C(t) dt = \tau \cdot \left(1 + \frac{2}{Pe} \right) \quad (1.24)$$

$$\int_0^{\infty} (t - \tau)^2 C(t) dt = \tau^2 \cdot \left(\frac{2}{Pe} + \frac{8}{Pe^2} \right) \quad (1.25)$$

Z zależności tych możemy wyznaczyć parametry modelu τ i Pe . Dla modelu szeregowo połączonych jednakowych idealnych mieszalników opisanego rozwiązaniem (1.19), odpowiednie zależności są następujące

$$\tau = \int_0^{\infty} t \cdot E(t) dt = N \cdot \tau_o \quad (1.26)$$

$$var = \int_0^{\infty} (t - \tau)^2 E(t) dt = \frac{\tau^2}{N} = N \cdot \tau_o^2 \quad (1.27)$$

Zależności te pozwalają na wyznaczenie parametrów modelu τ_o i N . Dla modeli o większej liczbie parametrów można stosować momenty wyższego rzędu i poprzez dodatkowe zależności wyznaczać parametry modelu. Występujące niepewności pomiarowe wyznaczenia doświadczalnej funkcji $E_d(t)$ przenoszą się odpowiednio na niepewności wyliczenia wartości momentów a w konsekwencji na niepewności wyznaczenia parametrów modelu. Niepewności te bardzo silnie rosną wraz ze stopniem wyznaczanego momentu. Dla pomiarów z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych dokładną analizę niepewności wyznaczenia parametrów modeli metodą momentów przedstawiono w pracy autora (Stęgowski 1993). Metoda ta bywa jeszcze obecnie stosowana, lecz w większości przypadków została ona wyparta przez metodę optymalizacji dopasowania teoretycznej funkcji modelu $E(t)$ do funkcji doświadczalnej $E_d(t)$. Podstawowym kryterium optymalizacji jest metoda najmniejszych kwadratów, gdzie minimalizujemy następującą funkcję

$$K(p_1, p_2 \dots p_K) = \sum_{i=1}^n \frac{(E(t_i / p_1, p_2 \dots p_K) - E_d(t_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (1.28)$$

gdzie:

- $p_1, p_2 \dots p_K$ – parametry modelu,
- σ_i – niepewność pomiaru $E_d(t_i)$,
- n – liczba punktów pomiarowych.

W metodzie tej wartość parametrów $p_1, p_2 \dots p_K$ wyznaczamy poprzez wyliczenie minimum funkcji K . Dla liniowych funkcji $E(t)$ istnieją analityczne algorytmy minimalizacji funkcji K . Dla funkcji nieliniowych stosuje się iteracyjne metody optymalizacji zależności (1.28). Ze względu na powszechność tej metody większość pakietów obliczeniowych (biblioteki języka Fortran i C, MATLAB, STATISTICA) oferuje gotowe procedury do przeprowadzania tego typu obliczeń. Przykładowo w pakiecie MATLAB dostępny jest interfejs graficzny do dopasowywania analitycznych jednowymiarowych funkcji liniowych i nieliniowych. Dla funkcji nieliniowych dostępne są iteracyjne algorytmy minimalizacji takie jak: metoda obszaru zaufania, metoda Gaussa-Newtona, metoda Levenberga-Marquardta. Pakiet ten wylicza wiele parametrów statystycznych pozwalających ocenić jakość dopasowania. Istotną zaletą pakietu jest wyliczanie przedziałów ufności wyznaczanych parametrów funkcji. Przedziały te pozwalają na określenie niepewności wyznaczanych parametrów modelu. Przedstawioną powyżej metodę możemy stosować bezpośrednio, jeżeli znana jest analityczna postać funkcji $E(t)$, a w pomiarach znacznikowych wprowadzenie znacznika miało charakter impulsowy, co po normalizacji (równanie 1.6) pozwala uzyskać doświadczalną funkcję $E_d(t)$. Dla pomiarów, w których wprowadzenie znacznika nie ma charakteru impulsowego metoda optymalizacji dopasowania funkcji modelu $E(t)$ do danych doświadczalnych {funkcje $C_{we}(t)$ $C_{wy}(t)$ } wymaga połączenia z procedurą numerycznego wyliczania całki splotu (równanie 1.5). W takiej sytuacji należy napisać programy skryptowe do przeprowadzenia takich obliczeń.

Matematyczne modele opisujące przepływ to zbiór bardziej lub mniej złożonych równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych. Dla bardziej złożonych modeli samodzielne rozwiązywanie tych równań jest bardzo pracochłonne, wymaga zaawansowanego przygotowania matematycznego i prawdopodobieństwo popełnienia błędu jest stosunkowo

duże. Obecnie istnieją pakiety oprogramowania, takie jak MAPLE lub MATHEMATICA, pozwalające na symboliczne rozwiązywanie zarówno równań różniczkowych zwyczajnych jak i równań różniczkowych cząstkowych. Zastosowanie tych pakietów daje gwarancję poprawności uzyskanego rozwiązania. Ewentualnym problemem może być dostęp do tych pakietów.

W wielu przypadkach równanie lub układ równań różniczkowych opisujących model nie posiada analitycznego rozwiązania. W przypadku braku rozwiązania analitycznego lub problemu z jego uzyskaniem alternatywą są numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych, dla których istnieje wiele bibliotek z procedurami do ich rozwiązywania. Przykładowe biblioteki to IMSL dla języka C, NAG dla Fortranu, oraz procedury ODE i PDE w pakiecie MATLABa. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych w połączeniu z iteracyjnymi procedurami optymalizującymi były do niedawna bardzo czasochłonne. Powodowało to znaczne ograniczenia w ich stosowaniu. Obecne moce obliczeniowe komputerów, nawet klasy PC, w wielu przypadkach eliminują te ograniczenia. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych jest szeroką dziedziną nauki i poprawne stosowanie tej metody wymaga dobrego przygotowania teoretycznego jak i informatycznego w zakresie skryptowego programowania w danym środowisku.

Kolejną metodą rozwiązywania równań różniczkowych jest metoda transformacji Laplace'a, transformująca funkcję z dziedziny czasu do dziedziny zmiennej zespolonej. Transformację tę możemy stosować dla funkcji $f(t)$, dla których wartości różne od zera występują tylko dla nieujemnego czasu. Transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ wyznaczamy z następującej całki

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (1.29)$$

gdzie:

s – zmienna zespolona (Laplace'a),
 $F(s)$ – transformata funkcji $f(t)$.

Podstawowe własności transformaty Laplace'a to:

– liniowość

$$L\{A_1 \cdot f_1(t) + A_2 \cdot f_2(t)\} = A_1 \cdot F_1(s) + A_2 \cdot F_2(s) \quad (1.30)$$

– różniczkowanie w dziedzinie czasu

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0) \quad (1.31)$$

$$L\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

– całkowanie w dziedzinie czasu

$$L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (1.32)$$

– całka splotu

$$L\left\{\int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du\right\} = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (1.33)$$

– przesunięcie w dziedzinie czasu


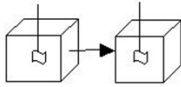
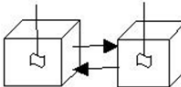
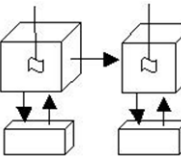

$$L\{f(t-T)\} = e^{-sT} F(s) \quad (1.34)$$

– transformata funkcji Diraca

$$L\{\delta(t)\} = 1 \quad (1.35)$$

Dzięki tym własnościom układy równań różniczkowych i całkowych możemy przekształcić w układ równań algebraicznych, który jest prostszy do rozwiązania.

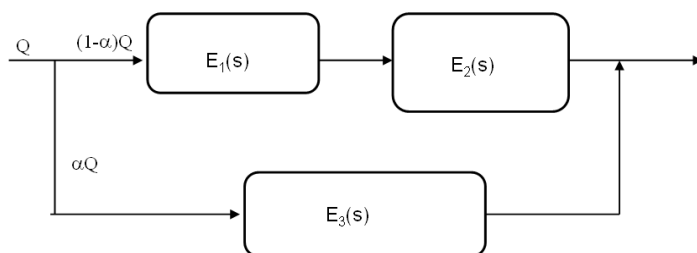
Tabela 1.1. Elementarne modele stosowane w modelowaniu przepływów na podstawie doświadczalnych funkcji rozkładu czasu przebywania (Villiermaux 1995)

Nazwa modelu	Symbol modelu	Parametry	Transformata Laplace'a
przepływ tłokowy		T	e^{-sT}
szeregowo połączone mieszalniki		$\tau \quad N$	$\left(1 + \frac{\tau}{N} \cdot s\right)^{-N}$
szeregowo połączone mieszalniki z wsteczną wymianą		$\tau \quad N \quad \alpha$	$\frac{1}{\alpha} \left(1 + 2\alpha + \frac{\tau}{N} \cdot s - b\right)$ $b = \left[1 + (2\tau s/N)(1 + 2\alpha) + (\tau s/N)^2\right]^{1/2}$
szeregowo połączone mieszalniki ze strefami wymiany		$\tau \quad N \quad t_m \quad \alpha$	$\left[\frac{1 + t_m s}{1 + (\tau/N + t_m)s + c t_m s^2}\right]^N$ $c = (\tau - \alpha t_m)/N$
model dyspersyjny „zamknięty – zamknięty”		Pe, τ	$\frac{4q \exp\left[\frac{Pe}{2}(1-q)\right]}{(1+q)^2 - (1-q)^2 \exp(-Peq)}$ $q = \sqrt{1 + \tau s / Pe}$

T – czas opóźnienia, τ – średni czas przebywania, N – ilość mieszalników, α – część płynu ulegająca wstecznemu przepływowi lub przepływającemu do strefy wymiany, Pe – liczba Pecleta, t_m – średni czas przebywania dla strefy wymiany.

Stosując tę metodę dla modelu komorowego i dyfuzji turbulentnej oraz zakładając impulsowy charakter wprowadzenia znacznika możemy wyznaczyć transformatę Laplace'a dla funkcji rozkładu czasu przebywania $L\{E(t)\}$, czyli $E(s)$. W tabeli 1.1 przedstawiono te transformaty dla podstawowych modeli komorowych oraz modelu dyfuzji turbulentnej „zamknięty-zamknięty”.

Na bazie modeli przedstawionych w tabeli 1.1 możemy, poprzez ich szeregowe lub równoległe połączenia, budować bardziej złożone modele. Operując w dziedzinie transformaty Laplace'a, transformatę $E(s)$ dla takiego modelu uzyskujemy poprzez mnożenie lub sumowanie transformat modeli elementarnych.



Rys. 1.14. Przykład modelu złożonego

Przykładowo dla modelu przedstawionego na rysunku 1.14 transformata ta jest równa

$$E(s) = (1 - \alpha) \cdot E_1(s) \cdot E_2(s) + \alpha \cdot E_3(s) \quad (1.36)$$

Otrzymaną w taki sposób funkcję $E(s)$ należy rozłożyć na funkcje proste o znanych transformatach odwrotnych i w ten sposób wyznaczyć funkcję $E(t)$. W przypadku modeli komorowych funkcja $E(s)$ jest najczęściej funkcją wymierną. W takim przypadku funkcję tę rozkładamy na ułamki proste i korzystając z tablic wyznaczamy funkcję odwrotną, czyli rozkład czasu przebywania w dziedzinie czasu $E(t)$. Obecnie istnieją gotowe procedury do rozkładu funkcji wymiernych na ułamki proste takie jak funkcja *residua* w pakiecie MATLABa. Dla złożonych modeli metoda

ta wymaga szczególnej staranności oraz procedur sprawdzających poprawność uzyskanego rozwiązania. Przy testowaniu wielu różnych modeli cały proces staje się bardzo czasochłonny. Przekształcenia równań różniczkowych i całkowych w równania algebraiczne możemy również dokonać poprzez transformatę Fouriera. Dla funkcji takich, jak rozkład czasu przebywania $E(t)$, czyli określonych tylko dla czasu nieujemnego ciągła transformata Fouriera ma postać

$$F\{E(t)\} = E(\omega) = \int_0^{\infty} E(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (1.37)$$

gdzie: j – czynnik urojony ($j^2 = -1$).

Transformata ta jest analogiczna do transformaty Laplace'a, z tym że zamiast zmiennej zespolonej s , mamy zmienną rzeczywistą ω . Wszystkie własności dotyczące transformaty Laplace'a {równania od (1.31) do (1.35)} są odpowiednio takie same dla transformaty Fouriera. Podane w tabeli 1.1 transformaty Laplace'a można przekształcić w transformaty Fouriera podstawiając zamiast zmiennej s zmienną $j\omega$.

Dla funkcji dyskretnych odpowiednikiem ciągłej transformaty Fouriera jest transformata dyskretna w postaci

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} E(t_n) \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{-kn} \quad (1.38)$$

oraz jej transformata odwrotna

$$E(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{kn} \quad (1.39)$$

gdzie:

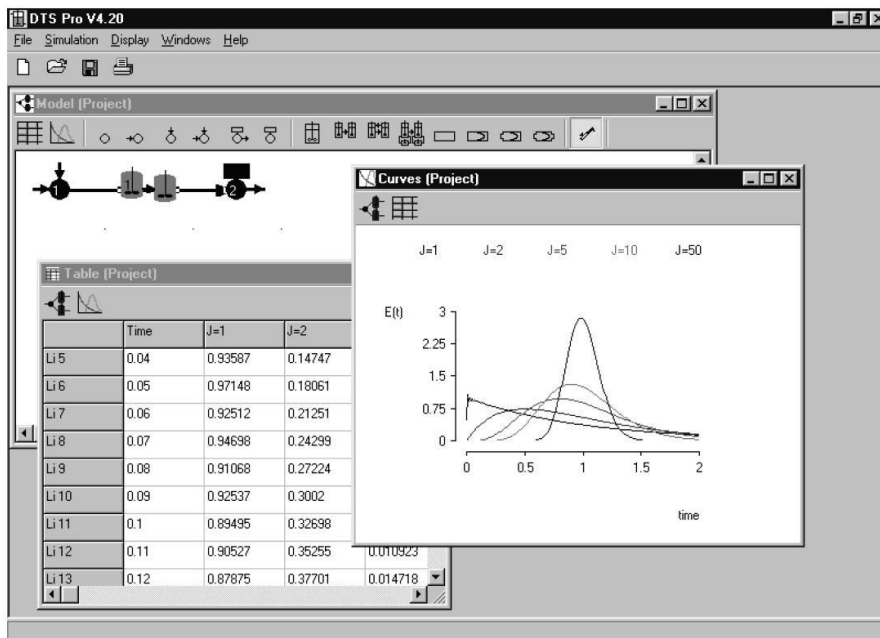
- k – numer harmonicznej,
- n – numer próbki sygnału,
- $E(t_n)$ – wartość próbki sygnału,
- N – liczba próbek.

Podstawową zaletą dyskretnej transformaty Fouriera (DFT) jest możliwość numerycznego przeprowadzania obliczeń. Pozwala to na opracowanie ogólnodostępnych programów komputerowych dedykowanych określonym zastosowaniom. Dla modelowania układów przepływowych, na podstawie pomiarów znacznikowych, opracowany został program o nazwie DTS (*Distribution de Temps de Séjour*, Leclerc i in. 1995). Program ten obsługuje się poprzez nakładkę graficzną, której podstawowymi elementami są:

- okno do graficznego projektowania modelu, z paskiem ikon modeli podstawowych,
- okno z tablicą danych pomiarowych oraz danych uzyskanych w procesie modelowania,
- okno z wykresem danych pomiarowych oraz danych uzyskanych w procesie modelowania.

Program zawiera podstawowe modele (tabela 1.1), z których można projektować modele złożone. Do każdego z tych modeli przypisana jest odpowiednia transformata Fouriera. Po zaprojektowaniu modelu złożonego należy nadać wartości początkowe parametrów dla wybranych modeli podstawowych oraz współczynniki rozdziału, jeżeli występują połączenia równoległe lub sprzężenia zwrotne. Po tym etapie, uruchamiając procedurę symulacji, program wylicza transformatę Fouriera dla zaprojektowanego modelu, a poprzez transformatę odwrotną wyliczana jest teoretyczna funkcja rozkładu czasu przebywania $E(t)$. W oknie z wykresem porównujemy uzyskaną funkcję $E(t)$ z funkcją doświadczalną $E_d(t)$. Po tym etapie można ewentualnie dokonać "ręcznej" zmiany parametrów modelu, tak aby uzyskać większą zgodność pomiędzy danymi uzyskanymi z modelu a danymi doświadczalnymi. Zasadniczym elementem programu jest uruchomienie iteracyjnej procedury optymalizującej. Przed uruchomieniem tej procedury zaznaczamy, które parametry modelu mają być optymalizowane oraz podajemy przedziały ich wartości, w których prowadzona będzie optymalizacja. Po przeprowadzeniu optymalizacji otrzymujemy wartości parametrów modelu dające najlepszą zgodność pomiędzy funkcją $E(t)$ a $E_d(t)$, poprzez wyliczenie minimum funkcji K opisanej równaniem (1.28). Opisane działanie programu dotyczy

przypadku, kiedy w pomiarach znacznikowych wprowadzenie znacznika było impulsowe, czyli mamy doświadczalną funkcję $E_d(t)$. W sytuacji kiedy wprowadzenie znacznika do układu nie było impulsowe, należy do programu z tablicą danych pomiarowych wprowadzić dane pomiarowe zarówno funkcji $C_{we}(t)$ jak i $C_{wy}(t)$. W takim przypadku program dodatkowo wylicza transformatę Fouriera dla funkcji $C_{we}(t)$ a następnie funkcję splotu pomiędzy tą transformatą a transformatą modelu. Pozostałe operacje są analogiczne jak dla wymuszenia impulsowego. Najistotniejszym wymaganiem poprawnego działania programu jest wprowadzenie do programu funkcji doświadczalnych w pełnym zakresie ich zmienności. Wymaga to przeprowadzenia pomiarów do czasu, kiedy praktycznie cały znacznik wypłyne z układu. Jest to warunek konieczny do poprawnego wykonywania obliczeń w dziedzinie transformaty Fouriera.



Rys. 1.15. Przykładowy obraz z programu DTS

Program ten jest łatwy i prosty w użyciu. Użytkownik dobrze zaznajomiony z metodą pomiarów znacznikowych oraz modelami

opisującymi układy przepływowe może po krótkim przeszkoleniu samodzielnie korzystać z programu. Graficzne konstruowanie modeli umożliwia weryfikację różnych ich postaci w bardzo krótkim czasie. Użytkownik całkowicie jest uwolniony od konieczności analitycznego lub numerycznego rozwiązywania równań opisujących skonstruowany model.

Program DTS jest komercyjnym programem, którego właścicielem jest Instytut PROGEPI z Nancy we Francji (Leclerc i in. 1995, Leclerc i in. 2000). W latach 2000 – 2002 w ramach programu POLONIUM autor niniejszej pracy brał udział w opracowaniu koncepcyjnym kolejnej wersji programu oraz testowaniu jej działania. W wersji tej wprowadzono dodatkowe procedury ułatwiające jego stosowanie w odniesieniu do badań z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych. W tym samym czasie w ramach międzynarodowych programów badawczych, koordynowanych przez Międzynarodową Agencję Energii Atomowej w Wiedniu, program ten został szeroko rozpowszechniony i jest stosowany w zespołach zajmujących się znacznikowymi badaniami układów przepływowych.

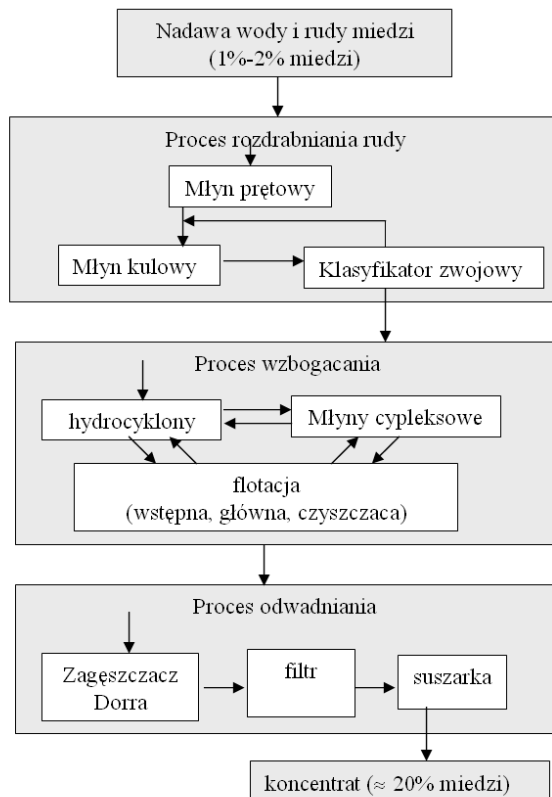
1.4. Badania przepływów w procesach wzbogacania rud miedzi

1.4.1 Procesy wzbogacania rud miedzi

Wydobywana w Zagłębiu Lubieńskim ruda polimetaliczna zawiera od 1,5% do 2,0% miedzi. Miedź występuje w postaci drobnych wtrąceń siarczków miedzi w skale. W pierwszym etapie, po wydobyciu, ruda jest poddawana procesowi wzbogacania, po którym uzyskuje się koncentrat zawierający około 20% miedzi. Koncentrat ten stanowi materiał wsadowy do procesu pirometalurgicznego, w którego końcowym etapie drogą elektrolityczną uzyskuje się czystą miedź. Wzbogacanie rudy jest procesem wielostopniowym składającym się z takich elementów jak: kruszenie, mielenie, klasyfikacja, wielostopniowe procesy flotacji i w końcowym etapie odwadnianie koncentratu. Po etapie kruszenia do procesu wprowadzana jest woda, która stanowi medium transportowe przerabianej rudy. Uproszczony schemat takiego procesu przedstawia rysunek 1.16.

Oprócz cen miedzi na rynku światowym, głównymi czynnikami wpływającymi na efektywność ekonomiczną zakładów wzbogacających

rudę są: zużycie energii, stopień wzbogacenia koncentratu oraz ilość miedzi traconej w odpadach. W trosce o podniesienie wskaźników ekonomicznych zakłady zmuszone są do ciągłego wprowadzania do ciągów technologicznych coraz bardziej nowoczesnych maszyn przerobczych oraz prowadzenia prac nad automatycznym sterowaniem całym procesem wzbogacania. Działania takie wymagają ciągłej kontroli i doświadczalnej weryfikacji parametrów technologicznych.



Rys. 1.16. Schemat procesu wzbogacania rudy miedzi
(Stegowski i Leclerc 2002)

Jedną z metod stosowaną przez kilkanaście lat do identyfikacji i opisu tych procesów była metoda badań z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych. W ciągu tych lat przebadane zostały prawie wszystkie

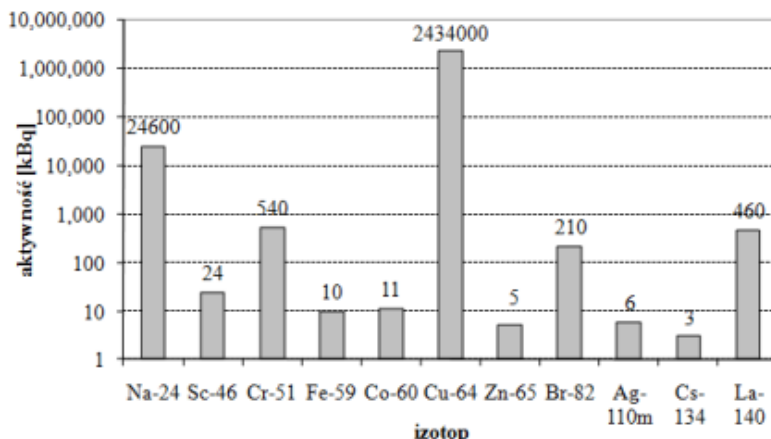
etapy procesu wzbogacania rud miedzi. W okresie tym nastąpiło również istotne udoskonalenie samej metody pomiarowej oraz rozwój w dziedzinie analizy danych, poprzez zastosowanie zaawansowanych programów pozwalających na dokładny ilościowy opis kinetyki przepływu cząstek rudy miedzi w badanych procesach.

1.4.2. Znakowanie rud miedzi

W badaniach znacznikowych procesów wzbogacania rudy miedzi głównym celem było wyznaczenie doświadczalnych rozkładów czasu przebywania cząstek rudy. Do znakowania tych cząstek stosowany był izotop Cu-64. Miedź naturalna składa się z dwu naturalnych izotopów Cu-65 (30,9%) i Cu-63 (69,1%). Po aktywacji rudy miedzi w reaktorze jądrowym neutronami termicznymi z izotopu Cu-63 otrzymuje się promieniotwórczy izotop Cu-64 o czasie połowicznego rozpadu 12,7 godziny. Izotop ten posiada wiele dróg rozpadu, gdzie największy udział ma wychwytywanie elektronu (43%) i emisja pozytonu (38%). Dla pomiarów znacznikowych najistotniejsza jest emisja pozytonu, który po anihilacji z elektronem emituje dwa fotony o energii 511 keV. Bezpośrednio po aktywacji próbki rudy miedzi otrzymujemy szereg różnych izotopów promieniotwórczych powstałych w wyniku aktywacji nuklidów znajdujących się w rudzie. Powstałe promieniotwórcze izotopy krótkożyciowe eliminowane były poprzez schładzanie próbki przez czas rzędu kilkudziesięciu godzin. W ten sposób eliminowane były z próbki izotopy promieniotwórcze o czasie połowicznego rozpadu mniejszym od kilku godzin. Odpowiednio krótki czas aktywacji, nieprzekraczający jednej godziny, zapobiegał istotnej produkcji izotopów długożyciowych.

Przed wykonywaniem badań znacznikowych przeprowadzone zostały pomiary spektrometryczne zaaktywowanych próbek rudy. Na rysunku 1.17 przedstawiono aktywności izotopów promieniotwórczych w próbce rudy o masie 100 mg. Próbka ta aktywowana była przez jedną godzinę w strumieniu neutronów termicznych $8 \cdot 10^{13}$ n/cm²s, a pomiar wykonany był 12 godzin po aktywacji. Poza Cu-64 największa aktywność pochodzi od Na-24, ale jest ona ponad 100 razy mniejsza od aktywności Cu-64. W zależności od badanego procesu masa próbek znacznika

wynosiła od kilku do kilkudziesięciu gramów natomiast ich aktywność była z przedziału od 1 do 3 GBq. Opis aparatury stosowanej w tych pomiarach znajduje się w publikacji Furmana i in. (2003).



Rys. 1.17. Aktywność izotopów w próbce rudy miedzi o masie 100 mg aktywowanej przez jedną godzinę w strumieniu neutronów termicznych $8 \cdot 10^{13} \text{ n/cm}^2\text{s}$ i studzonej przez 12 godzin

1.4.3. Badania porównawcze dwóch typów maszyn flotacyjnych

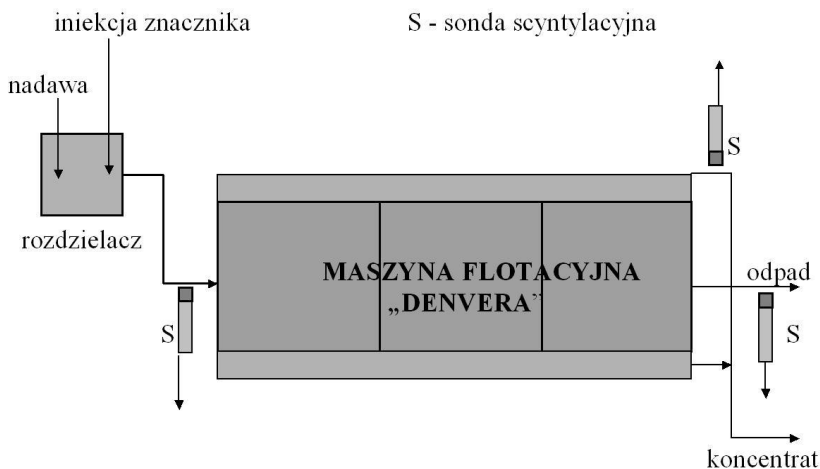
Flotacja jest głównym procesem wzbogacającym rudę miedzi, przeprowadzanym w maszynach flotacyjnych. Maszyna flotacyjna jest komorą przepływową, przez którą przepływa zawiesina wody i rozdrobnionej rudy. W maszynie tej znajdują się wirnikowe aeratory doprowadzające powietrze i mieszające pęcherzyki powietrza z zawiesiną. Hydrofobowe własności cząstek rudy zawierającej siarczki miedzi powodują ich przyczepianie się do pęcherzyków powietrza i wynoszenie na powierzchnię, skąd są zbierane jako koncentrat. Aby cząstki te były flotowane, ich wielkość musi być rzędu kilkudziesięciu mikrometrów. Oprócz szerokiego zakresu zagadnień fizyko-chemicznych procesu flotacji istotny jest charakter przepływu i mieszania zawiesiny w maszynie flotacyjnej. W maszynie powinno występować silne lokalne mieszanie zawiesiny (w okolicach aeratorów) z pęcherzykami powietrza tak, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo

wyflotowania cząstek miedzionośnych. Z drugiej strony mieszanie w całej objętości maszyny powinno być stosunkowo małe, tak aby nieflotowalne cząstki nie przebywały w maszynie zbyt długo, niepotrzebnie zwiększając energochłonność całego procesu.

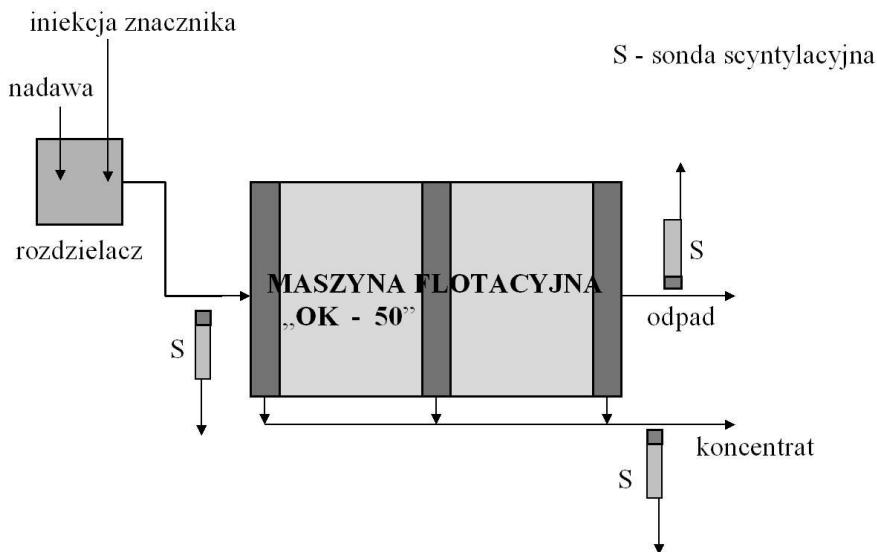
Obiektem badań były dwie włączone równolegle do ciągu technologicznego maszyny flotacyjne typu DENVER i OK-50. Maszyna DENVER była dotychczas stosowana, natomiast OK-50 była nowo testowaną maszyną. Przeprowadzone badania miały zdecydować o ewentualnym wdrożeniu nowej maszyny OK-50. Wydatek przepływu został tak dobrany, aby średni czas przebywania rudy w obu maszynach wynosił około 20 minut. Czas ten wynikał z badań technologicznych, które wykazały, że jest to wystarczający czas na wyflotowanie odpowiedniej wielkości cząstek miedzionośnych (cząstki flotowalne). Pomiar wykonywano kolejno dla maszyny flotacyjnej typu DENVER i OK-50. Znacznik wprowadzany był impulsowo do rozdzielacza podającego nadawę do danej maszyny i za pomocą sond scyntylicyjnych, umieszczonych na wyjściu odpadu oraz koncentratu, rejestrowane było natężenie promieniowania od znacznika w funkcji czasu. W ten sposób dokonywany był pomiar rozkładu czasu przebywania rudy przechodzącej do odpadu i koncentratu maszyn flotacyjnych. Również na wejściu każdej maszyny flotacyjnej zainstalowana była sonda scyntylicyjna w celu kontroli sposobu wprowadzania znacznika.

Schemat rozmieszczenia sond i miejsc wprowadzania (iniekcji) znacznika przedstawiony jest na rysunku 1.18 i 1.19. Na rysunkach 1.20 i 1.21 przedstawione są doświadczalne funkcje rozkładu czasu przebywania rudy przechodzącej do koncentratu i odpadu w obu maszynach flotacyjnych. W tabeli 1.2 podane są podstawowe parametry dla tych funkcji, czyli średni czas przebywania i odchylenie standardowe czasu przebywania.

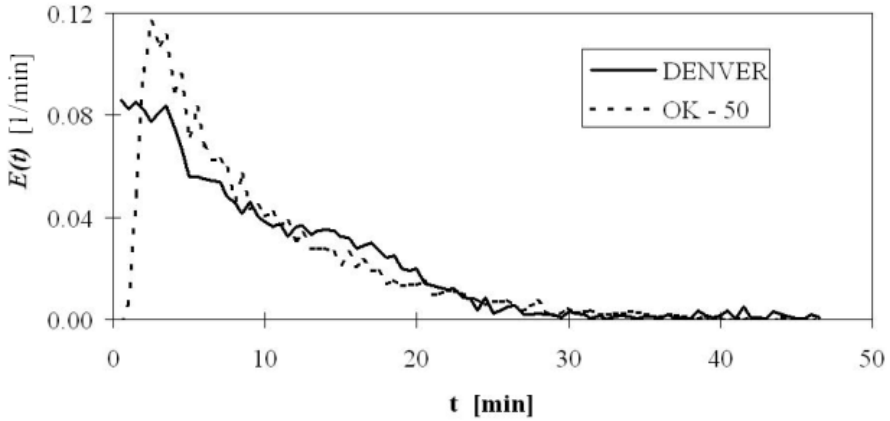
W przypadku rozkładu czasu przebywania miedzi przechodzącej do koncentratu nie widać istotnych różnic pomiędzy badanymi maszynami zarówno w kształtach funkcji $E(t)$ jak i ich parametrach. W obu przypadkach po czasie 20 minut ponad 90% cząstek flotowalnych przechodzi do koncentratu. Dane te potwierdziły wcześniejsze wyniki badań technologicznych. Istotne różnice wystąpiły w rozkładach czasu przebywania miedzi przechodzącej do odpadu.



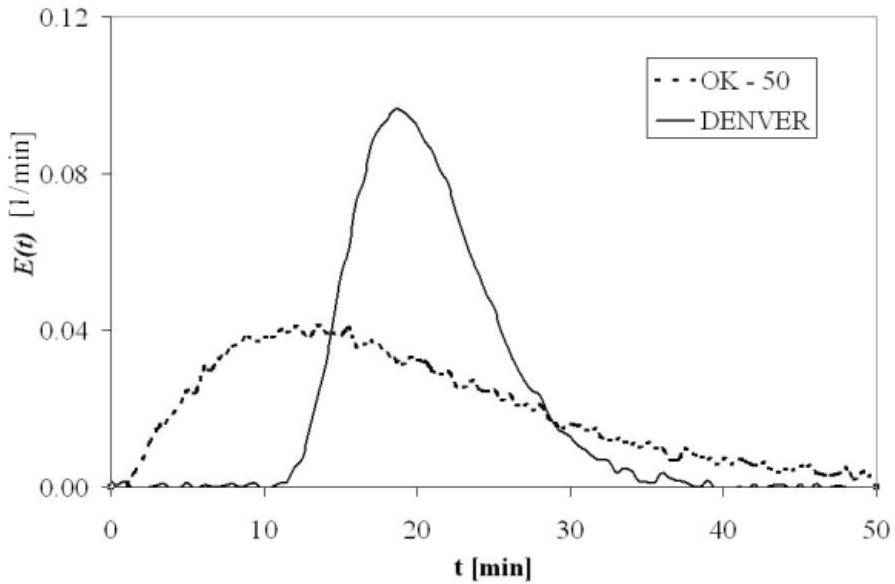
Rys. 1.18. Schemat pomiarów (widok z góry) dla maszyny flotacyjnej DENVERA



Rys. 1.19. Schemat pomiarów (widok z góry) dla maszyny flotacyjnej OK-50



Rys. 1.20. Rozkład czasu przebywania miedzi przechodzącej do koncentratu z maszyn flotacyjnych



Rys. 1.21. Rozkład czasu przebywania miedzi przechodzącej do odpadu z maszyn flotacyjnych

Tabela 1.2. Parametry przepływu dla maszyn flotacyjnych

Średni czas przebywania [min]			
maszyna flotacyjna OK - 50		maszyna flotacyjna Denvera	
odpad	koncentrat	odpad	koncentrat
19,5 ± 0,3	9,0 ± 0,2	20,5 ± 0,4	8,8 ± 0,2
Odchylenie standardowe rozkładu czasu przebywania [min]			
maszyna flotacyjna OK - 50		maszyna flotacyjna Denvera	
odpad	koncentrat	odpad	koncentrat
12,7 ± 0,4	7,0 ± 0,2	4,0 ± 0,2	7,0 ± 0,2

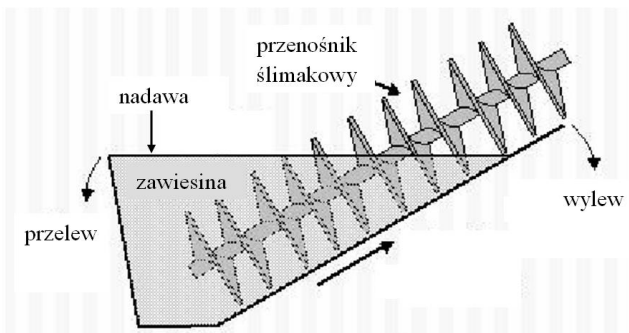
W maszynie Denver pierwsze ziarna zawierające miedź pojawiają się w odpadzie po około 10 minutach przebywania, średni czas przebywania wynosi około 20 minut a po 30 minutach praktycznie cała nadawa opuszcza maszynę flotacyjną. W maszynie OK-50 pierwsze ziarna rudy pojawiają się w odpadzie bardzo szybko to znaczy po czasie krótszym od 1 minuty, średni czas przebywania wynosi około 20 minut, ale dopiero po ponad 60 minutach praktycznie cała ruda miedzi przechodząca na odpad opuszcza maszynę. Wyniki te pokazały, że w maszynie OK-50 znaczna część rudy przebywa zbyt krótko, aby w pełni zostały wyflotowane ziarna miedzionośne, natomiast ziarna nieflotowalne przebywają w maszynie zbyt długo powodując dodatkowe, nieefektywne obciążenie maszyny. Uzyskane wyniki z pomiarów znacznikowych pokazały istotne różnice w charakterze przepływu cząstek rudy miedzi w obu maszynach flotacyjnych. Pomiaru znacznikowe były jednym z elementów badań technologicznych koordynowanych przez Instytut Metali Nieżelaznych w Gliwicach. Wyniki tych badań miały być podstawą decyzji o ewentualnym wdrożeniu maszyny flotacyjnej OK-50. W odniesieniu do celu badań znacznikowych w przedstawionym przykładzie wystarczyła prosta analiza parametryczna doświadczalnych funkcji rozkładów czasu przebywania.

1.4.4. Badania procesu mielenia i klasyfikacji

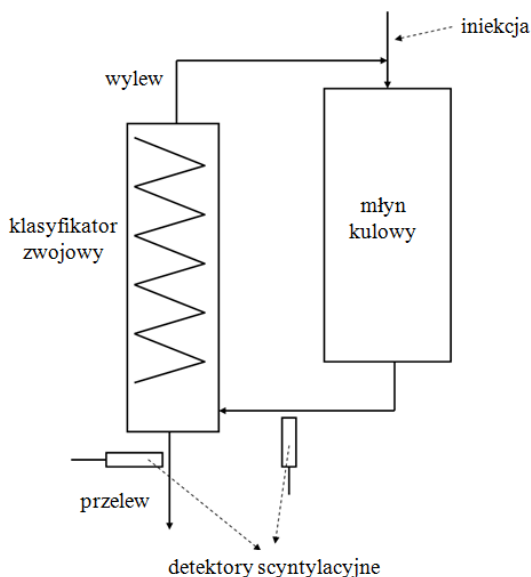
Proces mielenia rudy odbywa w bębnowych młynach obrotowych. Młyn taki wypełniony jest metalowymi prętami (młyn prętowy) lub kulami (młyn kulowy). W zakładach przeróbczych stosowanych jest kilka różnych rodzajów układów mielenia. W niektórych układach wstępne mielenie odbywa się w młynie prętowym a kolejne w młynie kulowym. W innych układach stosowane są tylko młyny kulowe. Młyn kulowy jest to obracający się w osi poziomej bęben wypełniony stalowymi kulami, przez który przepływa woda z rudą. Prędkość obrotowa bębna jest tak dobrana, aby kule unoszone były na odpowiednią wysokość, z której swobodnie spadają. Spadające kule zderzając się z innymi powodują rozdrabnianie ziaren rudy, które znajdują się pomiędzy zderzającymi się kulami. Uziarnienie (rozmiar) cząstek rudy wychodzących z młyna nie jest jednorodny. Aby rozdzielić drobne ziarna, które mogą przejść do dalszych etapów procesu wzbogacania, od ziaren grubych, wymagających ponownego mielenia, stosowany jest na tym etapie klasyfikator zwojowy. Klasyfikator zwojowy jest to pochyle koryto w kształcie dopasowanym do przenośnika ślimakowego (rys. 1.22.). Zawiesina rudy z młyna podawana jest do dolnej części klasyfikatora i wypełnia go po dolny brzeg, przez który przepływa woda z drobnymi cząstkami (przelew klasyfikatora). Grube cząstki opadające na dno koryta transportowane są za pomocą przenośnika ślimakowego i wyprowadzane poprzez górny brzeg koryta (wylew klasyfikatora). W badanym układzie materiał z wylewu klasyfikatora był powtórnie kierowany do młyna kulowego. Układ ten jako pierwszy został objęty pracami nad automatycznym sterowaniem. Poprawne sterowanie wymagało wyznaczenia rozkładów czasu przebywania rudy w tym układzie, co można było uzyskać poprzez przeprowadzenie pomiarów znacznikowych. Schemat badanego układu przedstawiono na rysunku 1.23.

Znacznikiem była próbka rudy miedzi pobrana z nadawy do młyna i aktywowana w reaktorze jądrowym. Próbka ta złożona była z ziaren rudy miedzi nie przekraczających rozmiaru kilku milimetrów. Znacznik ten wprowadzany był na wejście młyna kulowego. Sondy scyntylacyjne umieszczone były na wyjściu z młyna oraz przelewie klasyfikatora

zwojowego. Podstawowym celem badań było wyznaczenie rozkładu czasu przebywania rudy miedzi dla całego układu, czyli przechodzącej na przelew klasyfikatora (rys. 1.26). Z parametrycznej analizy (metoda momentów) uzyskanej funkcji otrzymano wartość średniego czasu przebywania równą 29 minutom, a odchylenie standardowe równe 25 minutom. Duże rozmycie tej funkcji powoduje, że dopiero po ponad półtorej godzinie ponad 95% rudy opuszcza układ.

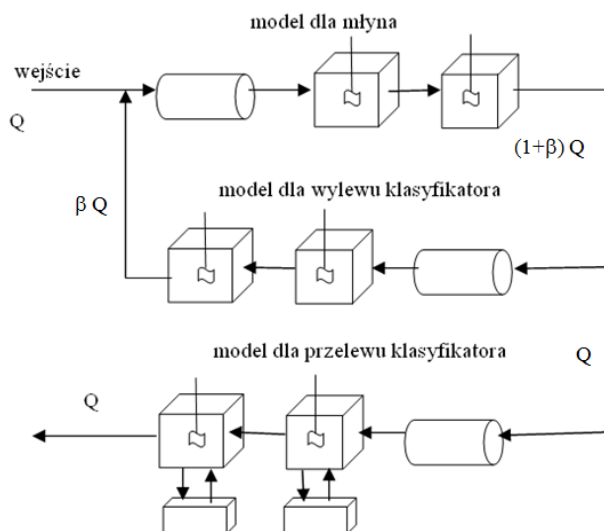


Rys. 1.22. Klasyfikator zwojowy



Rys. 1.23. Schemat układu wstępnego mielenia i klasyfikacji

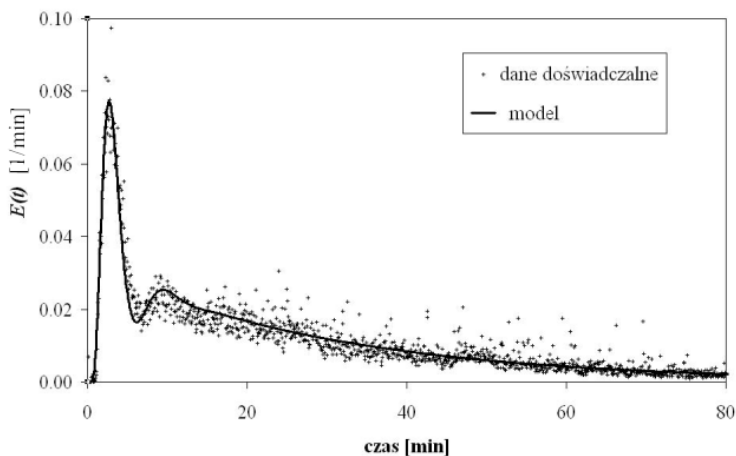
Dodatkowo uzyskane wyniki zostały wykorzystane do zaprojektowania modeli przepływu rudy w młynie i klasyfikatorze zwojowym. Pozwoliło to na wyznaczenie parametrów charakteryzujących rozkłady czasu przebywania rudy w tych układach. Dla młyna zastosowano model szeregowo połączonych idealnych mieszalników z opóźnieniem transportowym. Analogiczny model zastosowano dla wylewu klasyfikatora, natomiast dla przelewu klasyfikatora zastosowano model szeregowo połączonych mieszalników ze strefą zatrzymania i opóźnieniem transportowym. Schemat zastosowanego modelu przedstawiono na rysunku 1.24.



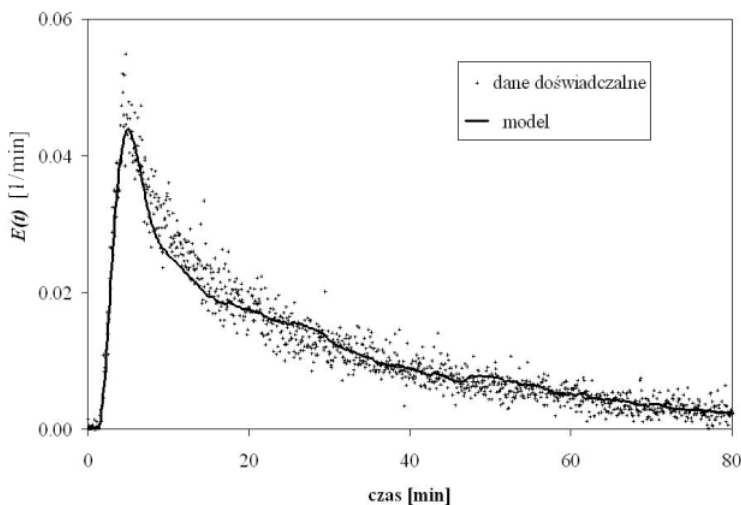
Rys. 1.24. Model dla młyna i klasyfikatora zwojowego (Q – objętościowe natężenie przepływu, β – część materiału przepływającego na wylew klasyfikatora)

Na rysunkach 1.25 i 1.26 przedstawiono dane doświadczalne z dopasowanymi modelami, których parametry podane są w tabeli 1.3. Opis tych parametrów przedstawiony jest w rozdziale 1.3. W jednostkowych elementach układu średni czas przebywania wynosi od niecałej minuty dla przelewu klasyfikatora do około 4 minut dla wylewu klasyfikatora i około 3 minut dla młyna. W układzie tym występuje stosunkowo duży zawrót

(z wylewu klasyfikatora do młyna) rzędu $\beta = 3,5$ (rys. 1.24). Funkcja $E(t)$ na wyjściu z całego układu (przelew klasyfikatora) jest złożeniem przepływu znacznika poprzez młyn i przelew klasyfikatora oraz kolejnych zawrotów znacznika przepływającego powtórnie do młyna poprzez wylew klasyfikatora (rys. 1.26).



Rys. 1.25. Dopasowany model do danych doświadczalnych z wyjścia młyna kulowego



Rys. 1.26. Dopasowany model do danych doświadczalnych z przelewu klasyfikatora

Tabela 1.3. Parametry przepływu dla młyna i klasyfikatora zwojowego (opis znaczenia parametrów zgodnie z tabelą 1.1 i rys. 1.24)

	T [min]	τ [min]	N	t_m [min]	α	β
młyn kulowy	0,30± 0,01	2,9± 0,1	5,5± 0,3	-	-	-
wylew klasyfikatora	0,27± 0,01	3,7± 0,1	2,0± 0,2	-	-	3,5± 0,3
przelew klasyfikatora	0,04± 0,01	0,8± 0,03	2,4± 0,2	0,53± 0,1	0,85± 0,05	-

Zaproponowane modele należy traktować jako fenomenologiczne pozwalające na ilościową charakterystykę przepływu rudy w jednostkowych elementach badanego układu. W stosunku do złożoności zjawisk zachodzących w procesie mielenia i klasyfikacji interpretacja fizyczna tych modeli jest dyskusyjna. Ze względu na burzliwość przepływu zarówno w procesie mielenia jak i klasyfikacji modele idealnego wymieszania są stosowane do opisu zachowania cząstek fazy stałej w takich przepływach (Weller i in. 2000, Mitsutani i in. 2005).

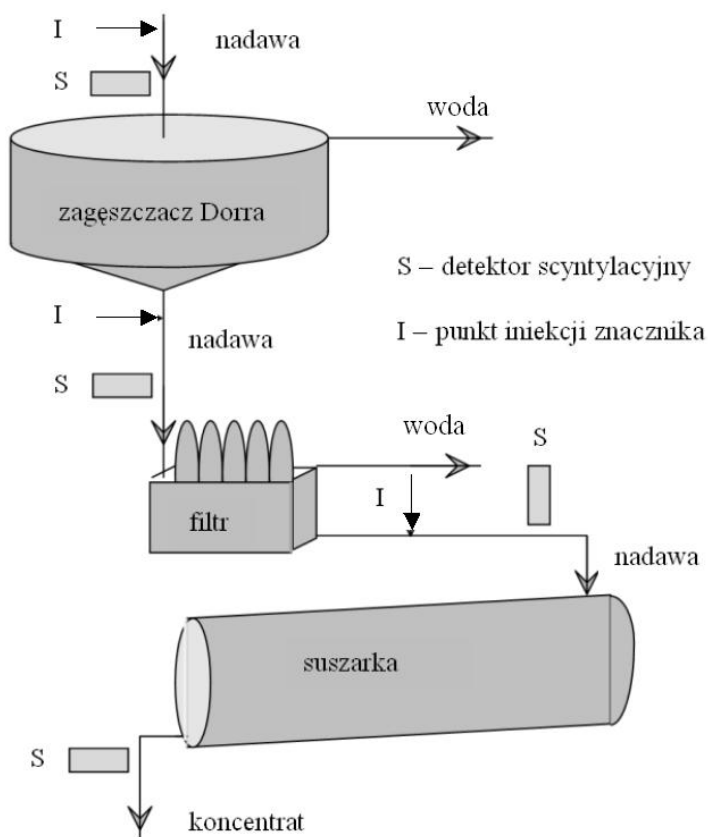
Przedstawione badania wykonane zostały na zlecenie Centrum Badawczo-Projektowego Miedzi CUPRUM we Wrocławiu. W tym czasie Centrum to zajmowało się wdrożeniem systemu automatycznego sterowania etapu mielenia i klasyfikacji procesu wzbogacania rud miedzi. Badania znacznikowe pozwoliły na pełną ilościową charakterystykę czasową przepływu rudy miedzi w układzie młyn kulowy – klasyfikator zwojowy. Wyniki te zostały wykorzystane do zaprojektowania układów sterujących tym etapem procesu wzbogacania rudy miedzi.

1.4.5. Identyfikacja procesów odwadniania koncentratu rud miedzi

Ostatnim etapem procesu wzbogacania rud miedzi jest proces odwadniania. Proces odwadniania drobnouziarnionych koncentratów

flotacyjnych jest (obok rozdrabniania) najbardziej energochłonnym spośród wszystkich procesów występujących w przeróbce rudy. Ze względu na konieczność prowadzenia procesu przy możliwie małym zużyciu energii odwadnianie prowadzi się etapowo, przy czym kolejne etapy charakteryzują się wzrastającym zużyciem energii. Odwadnianie koncentratu miedzi odbywa się w trzech następujących etapach (rys. 1.27):

- zagęszczanie grawitacyjne w zagęszczaczach Dorra,
- filtrowanie w tarczowych filtrach,
- suszenie w suszarkach obrotowych opalanych gazem ziemnym.



Rys. 1.27. Schemat procesu odwadniania (Stegowski i Furman 2004)

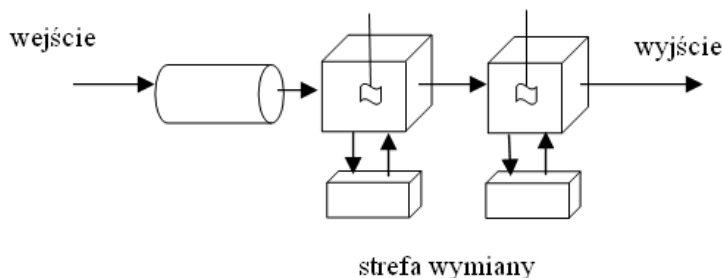
Nadawę do procesu odwadniania stanowi koncentrat flotacyjny, o zawartości wody ok. 92-95%. Produkt zagęszczony z zagęszczacza (wylew) ma przeciętną wilgotność 60-70%. Produkt odwodniony w filtrze ma wilgotność ok. 20-25 %, wilgotność produktu końcowego wysuszonego koncentratu z suszarki nie może przekraczać 8 %. Celem badań znacznikowych było wyznaczenie doświadczalnych funkcji rozkładów czasu przebywania dla poszczególnych etapów procesu odwadniania oraz zaproponowanie i optymalizacja modeli opisujących przepływ w urządzeniach odwadniających. Pomiary wykonywano oddzielnie dla każdego z urządzeń. Aby nie doprowadzić do „skażenia” znacznikiem, w kolejnych pomiarach, badania wykonywano w kolejności odwrotnej do przebiegu procesu, czyli kolejno dla suszarki, filtra i zagęszczacza. Znacznik wprowadzany był impulsowo na wejście każdego urządzenia i za pomocą sondy scyntylicyjnej umieszczonej na wyjściu układu i rejestrującej natężenie promieniowania od znacznika, dokonywany był pomiar rozkładu czasu przebywania. Również na wejściu każdego układu zainstalowana była sonda scyntylicyjna w celu kontroli sposobu wprowadzania znacznika. Schemat rozmieszczenia sond i miejsc wprowadzania (iniekcji) znacznika przedstawiony jest na rysunku 1.27.

Suszarka bębnowa stanowi ostatni etap procesu odwadniania. Głównym elementem suszarki jest lekko pochylony bęben, który wprowadzony jest w ruch obrotowy. Odparowanie wody z suszonego materiału następuje w trakcie przesypywania się wewnątrz bębna suszarki. Przesypywanie się materiału powoduje jego mieszanie oraz ze względu na pochylenie bębna transport materiału wzdłuż bębna. Suszenie powodowane jest wymuszonym przepływem gorącego gazu spalinowego o temperaturze około 850 °C.

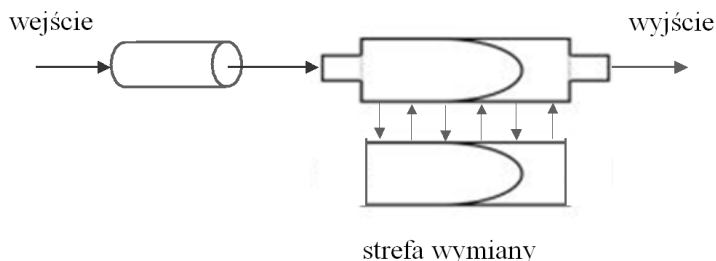
Uzyskana z pomiarów doświadczalna funkcja rozkładu czasu przebywania cząstek koncentratu rudy miedzi (rys. 1.30) pozwoliła na ilościową analizę transportu tych cząstek w suszarce. Łączny średni czas przebywania cząstek rudy w suszarce wyznaczony metodą momentów (rów. 1.3) wynosi około 75 minut. Kształt uzyskanej funkcji wskazywał na występowanie zarówno opóźnienia transportowego jak i strefy zatrzymania (porównanie rys. 1.5 i 1.30). Można postawić tezę, że strefa zatrzymania, o dłuższym średnim czasie przebywania, związana jest z materiałem

przylegającym do ścianek suszarki. Główną strefę transportu stanowi obszar oddalony od ścianek, gdzie również znajduje się suszony materiał i jest on szybciej transportowany. W trakcie obrotów suszarki występuje wymiana materiału między tymi strefami.

Aby ilościowo opisać transport cząstek rudy, zaproponowane zostały dwa modele ze strefami wymiany. Pierwszy model zawierał szeregowo połączone mieszalniki z komorami wymiany oraz model opóźnienia transportowego (rys. 1.28). Drugi model zawierał opóźnienie transportowe oraz główną strefę przepływu wraz ze strefą wymiany w obu przypadkach opisane modelami dyspersyjnymi (rys. 1.29).



Rys. 1.28. Komorowy model dla suszarki



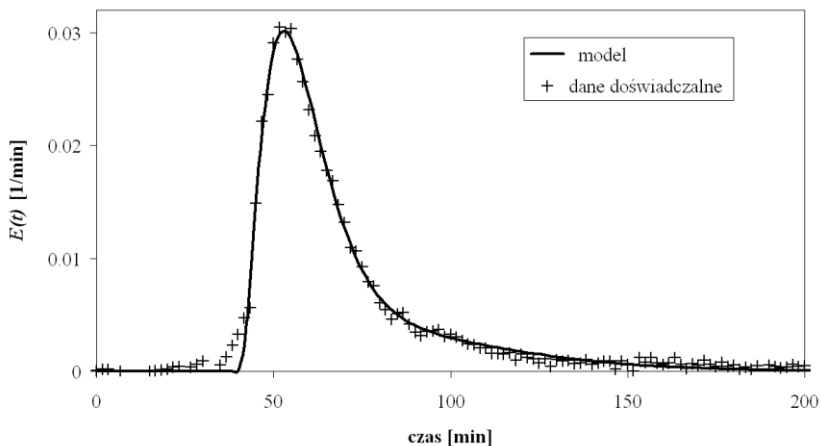
Rys. 1.29. Dyspersyjny model dla suszarki

Dla pierwszego modelu optymalizacja parametrów wykonana została za pomocą programu DTS. Dla drugiego przypadku opracowany został program numerycznego rozwiązania dla tego modelu wraz z programem optymalizującym jego parametry w stosunku do danych doświadczalnych.

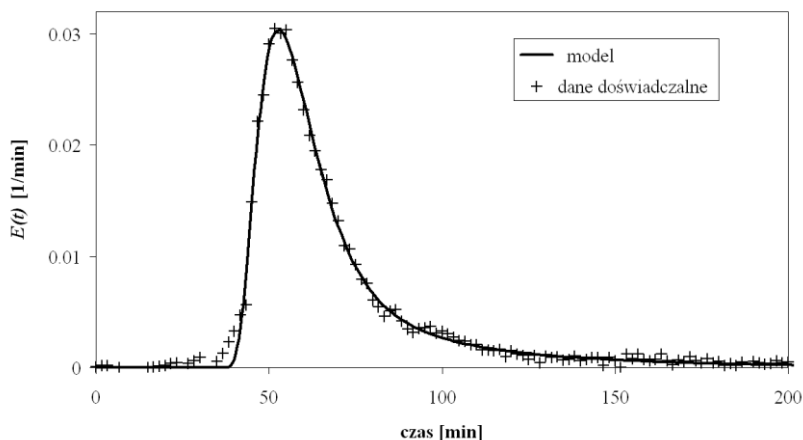
Dane doświadczalne funkcji $E(t)$ z dopasowanymi modelami przedstawiono na rysunkach 1.20 i 1.31. Wartości parametrów dla obu modeli podano w tabeli 1.4. Z obu modeli wynika, że około 30% cząstek rudy transportowane jest poprzez strefę wymiany (zatrzymania). Uwzględniając opóźnienie transportowe i średnie czasy przebywania w poszczególnych strefach dla obu modeli uzyskano w granicach błędów identyczne wyniki. Jedynie dla strefy wymiany wyniki te różnią się o około 10%.

Tabela 1.4. Parametry modeli transportu cząstek rudy w suszarce

parametr	model komorowy	model dyspersyjny
Opóźnienie transportowe T [min]	$40,4 \pm 1,5$	$33,8 \pm 1,5$
Średni czas przebywania w strefie głównej τ_g [min]	$20,5 \pm 1,0$	$25,9 \pm 1,2$
$T + \tau_g$	$60,9 \pm 1,8$	$59,7 \pm 2,0$
Średni czas przebywania w strefie wymiany τ_w [min]	$42,2 \pm 1,5$	$59,8 \pm 2,0$
$T + \tau_w$	$82,6 \pm 2,2$	$93,6 \pm 2,5$
Liczba komór N	$3,0 \pm 0,2$	-
liczba Pecleta dla strefy głównej Pe	-	$8,8 \pm 0,4$
liczba Pecleta dla strefy wymiany Pe	-	$2,5 \pm 0,3$
część materiału transportowana poprzez strefę wymiany α	$0,33 \pm 0,03$	$0,28 \pm 0,03$
Całkowity średni czas przebywania [s]	$74,8 \pm 2,5$	$76,2 \pm 2,6$



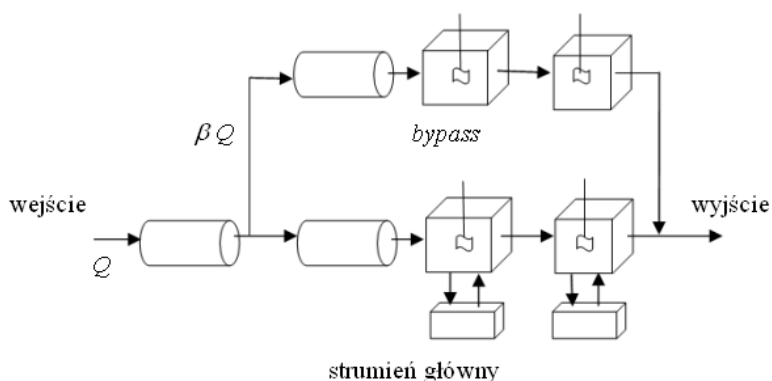
Rys. 1.30. Komorowy model dopasowany do danych doświadczalnych dla suszarki (Stegowski i Furman 2004)



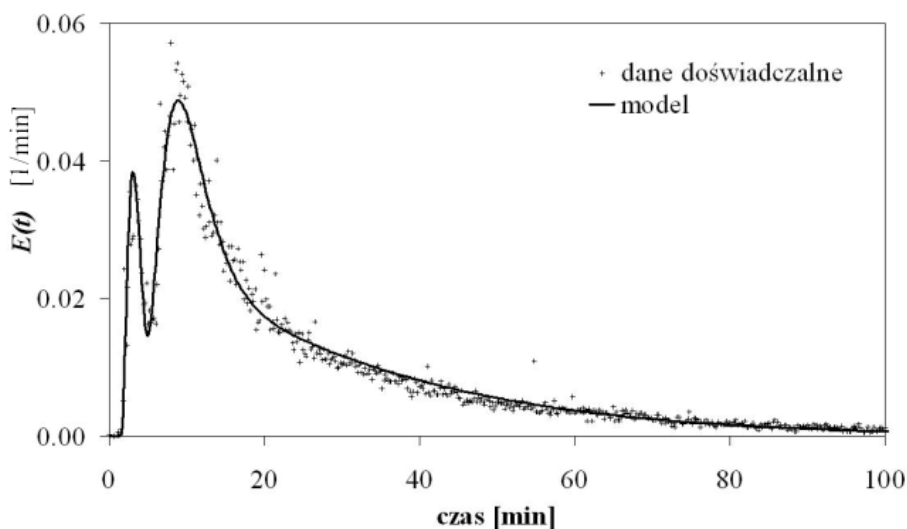
Rys. 1.31. Dyspersyjny model dopasowany do danych doświadczalnych dla suszarki

Filtr jest to koryto wypełnione zawiesiną koncentratu podawaną z zagęszczacza Dorra. Obrotowe membrany, połączone z systemem próżniowym, zanurzone są do połowy w zawieszinie. W membranach wytwarzane jest podciśnienie, które powoduje osadzanie się na nich zagęszczonego koncentratu i po obrocie membran zagęszczony materiał

przechodzi nad powierzchnię zawiesiny, skąd jest zbierany i przekazywany na wyjście filtra. Woda z filtra przelewa się poprzez brzozy koryta.



Rys. 1.32. Model dla filtra (Q – objętościowe natężenie przepływu, β – część materiału przepływającego przez *bypass*)



Rys. 1.33. Dopasowany model do danych doświadczalnych dla filtra (Stegowski i Furman 2004)

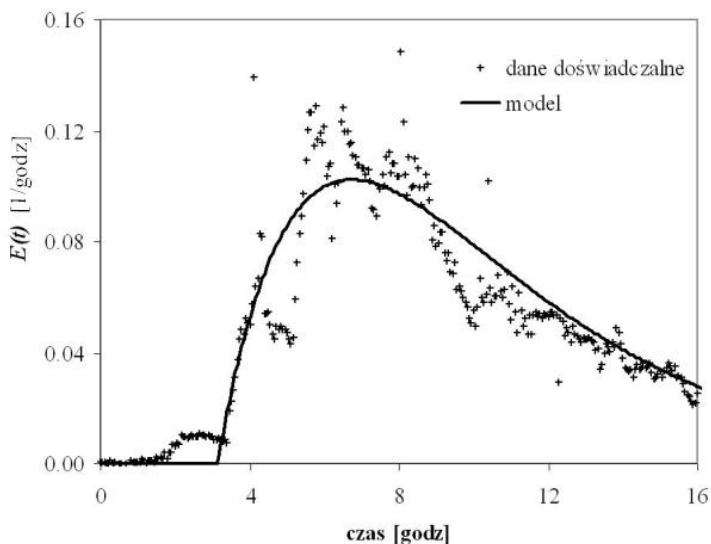
Tabela 1.5. Parametry otrzymane dla filtra (opis znaczenia parametrów zgodnie z tabelą 1.1 i rysunkiem 1.30)

	T [min]	τ [min]	t_m [min]	α	N	β [%]
wejście	$1,00 \pm 0,03$	-	-	-	-	-
<i>bypass</i>	$0,40 \pm 0,02$	$2,1 \pm 0,05$	-	-	$4,0 \pm 0,2$	$9,0 \pm 0,4$
strumień główny	$3,40 \pm 0,06$	$8,3 \pm 0,2$	$12,5 \pm 0,5$	$0,55 \pm 0,03$	$3,0 \pm 0,2$	-

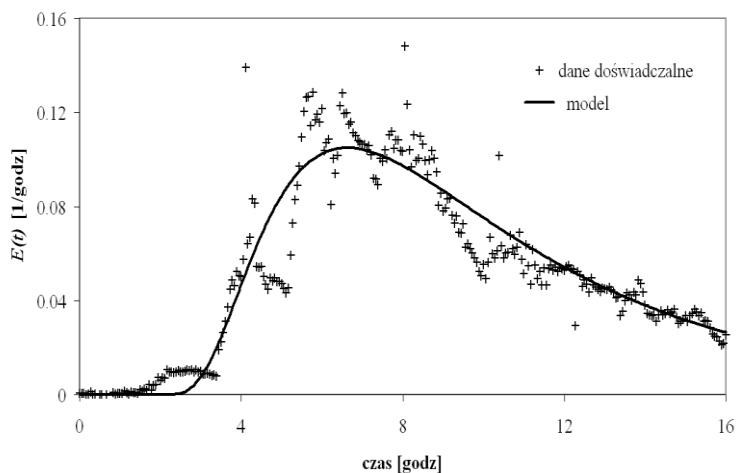
Uzyskana doświadczalna funkcja rozkładu czasu przebywania koncentratu w filtrze wykazała występowanie w nim trzech stref przepływu. Stwierdzono występowanie strumienia uprzywilejowanego (*bypass*), którym w stosunkowo krótkim czasie (2,5 min) przepływa około 9% koncentratu. Przez obszar wokół membran przepływa około 34% koncentratu, w którym średni czas przebywania wynosi około 8,5 min oraz przez obszar przy brzegach, dnie i rogach koryta, gdzie koncentrat przebywa średni 12,5 min. Rysunek 1.32 przedstawia zaproponowany model, którego wartości parametrów podano w tabeli 1.5. Natomiast dane doświadczalne $E(t)$ z dopasowaną funkcją uzyskaną z modelu przedstawiono na rysunku 1.33.

Zagęszczacz Dorra jest to cylindryczny zbiornik o lekko stożkowym kształcie dna. Nadawa, zawierająca około 95% wody, podawana jest centralnie od góry. Faza stała osadza się grawitacyjnie na dnie osadnika i poprzez ruchome grabie zgarniana jest do centralnej dolnej części zagęszczacza, skąd jest odpompowywana. Natomiast woda przelewa się do rynien okalających koronę zagęszczacza. Analogicznie jak w poprzednich przypadkach znacznik w sposób impulsowy został wprowadzony na wejście, a pomiar doświadczalnej funkcji rozkładu czasu przebywania dokonywany był poprzez sondę umieszczoną za pompą odprowadzającą zagęszczony koncentrat. Ze względu na duże niestabilności pracy układu podającego nadawę do zagęszczacza jak i układu odprowadzającego koncentrat, kształt doświadczalnej krzywej jest bardzo nieregularny.

Ponadto z powodów technicznych pomiar musiał być przerwany po około 16 godzinach, co nie pozwoliło na uzyskanie pełnej krzywej $E(t)$.



Rys. 1.34. Komorowy model dopasowany do danych doświadczalnych dla zagęszczacza Dorra (Stegowski i Furman 2004)



Rys. 1.35. Dyspersyjny model dopasowany do danych doświadczalnych dla zagęszczacza Dorra

Tabela 1.6. Parametry uzyskane dla zagęszczacza Dorra

parametr	model komorowy	model dyspersyjny
Opóźnienie transportowe T [godz.]	$3,1 \pm 0,2$	$1,4 \pm 0,1$
Średni czas przebywania τ [godz.]	$7,2 \pm 0,5$	$9,3 \pm 0,5$
$T + \tau_g$	$10,3 \pm 0,6$	$10,7 \pm 0,6$
Liczba komór N	$2,0 \pm 0,1$	-
liczba Pecleta Pe	-	$4,5 \pm 0,4$
Odchylenie standardowe „rozmycie” σ [godz.]	$5,1 \pm 0,4$	$5,8 \pm 0,4$

Aby oszacować średni czas przebywania i rozmycie czasu przebywania cząstek fazy stałej w zagęszczaczu, do danych doświadczalnych dopasowane zostały teoretyczne funkcje $E(t)$ odpowiadające modelowi szeregowo połączonych mieszalników oraz modelowi dyspersyjnemu. W obu przypadkach dołączony był model przepływu tłokowego (opóźnienie transportowe). Uzyskane z dopasowania wartości parametrów podano w tabeli 1.6. Dane doświadczalne funkcji $E(t)$ z dopasowanymi modelami przedstawiono na rysunkach 1.34 i 1.35. Z wartości parametrów dopasowanych modeli można stwierdzić, że średni czas przebywania cząstek fazy stałej w zagęszczaczu wynosi ponad 10 godzin a odchylenie standardowe ponad 5 godzin.

Niniejsze badania miały charakter poznawczy i przeprowadzone były przy współpracy z Wydziałem Górniczym AGH. W tym czasie rozważane były projekty modernizacji procesu odwadniania koncentratu rudy miedzi. Przed tymi pomiarami praktycznie nie były znane czasy przebywania cząstek fazy stałej koncentratu miedzi w zagęszczaczu Dorra i suszarce. Było to wynikiem braku możliwości określenia objętości czynnej przez którą przepływa lub są transportowane cząstki fazy stałej.

1.5. Podsumowanie

Przedstawiony w tym rozdziale model dyfuzji turbulentnej (dyspersyjny) oraz modele komorowe są historycznie ugruntowanymi i powszechnie stosowanymi w opisie przepływu płynów. Modele te są również stosowane do opisu burzliwych przepływów mieszanin cząstek fazy stałej i płynu. Najczęściej stosowanymi modelami były i są dwuparametrowe modele dyfuzji turbulentnej (jednowymiarowy model dyspersyjny) lub szeregowo połączonych mieszalników. Jednym z powodów stosowania tych modeli jest stosunkowo prosty sposób wyznaczania parametrów tych modeli na podstawie danych doświadczalnych. W tych przypadkach stosowana jest metoda momentów (równania 1.24, 1.25, 1.26 i 1.27) lub metoda dopasowania rozwiązań analitycznych (równania 1.12 i 1.19) do danych doświadczalnych. Dla bardziej rozbudowanych modeli problem staje się bardziej złożony i wymaga czasochłonnych prac w poszukiwaniu analitycznego rozwiązania dla zaprojektowanego modelu oraz optymalizacji jego parametrów na podstawie danych doświadczalnych. W przypadku braku rozwiązań analitycznych konieczne jest opracowanie programów skryptowych do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych opisujących model i połączenie go z programem optymalizującym, czyli dopasowującym rozwiązania numeryczne do danych doświadczalnych (Baguley i in. 1988). W obu przypadkach dodatkowym problemem może być konieczność rozwiązywania całki splotu (równanie 1.5).

Trwający od kilkunastu lat rozwój metod i dedykowanych programów komputerowych znacznie ułatwił praktyczne możliwości stosowania wieloparametrowych modeli i wyznaczania ich parametrów na podstawie danych doświadczalnych. Jednym z głównych celów powyższego rozdziału jest przedstawienie aktualnych możliwości zastosowania metod i programów komputerowych do modelowania układów przepływowych w oparciu o doświadczalne dane uzyskane w pomiarach znacznikowych. Dedykowane programy do takiego modelowania, tak jak program DTS (rozdział 1.3.3), pozwalają na budowę i weryfikację doświadczalną dowolnie rozbudowanych modeli.

Praktyczne zastosowania takiego modelowania zostały przedstawione na przykładach badań przepływów w procesach wzbogacania rudy miedzi. Przykłady te zostały tak dobrane, aby pokazać zróżnicowany sposób złożoności przepływu i jego analizy. W przypadku maszyn flotacyjnych wystarczająca była prosta analiza parametryczna funkcji rozkładu czasu przebywania. Dla układu mielenia i klasyfikacji do analizy konieczne było zastosowanie złożonych modeli pozwalających opisać występujące tam przepływy.

Przy konstruowaniu modelu istotne jest uzyskanie dobrej zgodności pomiędzy doświadczalną a teoretyczną funkcją rozkładu czasu przebywania. Z drugiej strony w przypadku konieczności zastosowania złożonego (wieloparametrowego) modelu może to powodować duże niejednoznaczności w fizycznej interpretacji charakteru przepływu. Przykładowo dla złożonych modeli komorowych przeniesienie pojedynczych elementów takiego modelu na wybrane obszary układu przepływowego może być dyskusyjne i trudne do fizycznej interpretacji.

W następnym rozdziale przedstawiona jest metoda numerycznej mechaniki płynów, która pozwala na jednoznaczny fizyczny opis przepływu w badanym układzie.

2. Zastosowanie numerycznej mechaniki płynów na przykładzie granulometrycznego rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie

2.1. Wprowadzenie

Przedstawione w poprzednim rozdziale modele opisu układów przepływowych są modelami fenomenologicznymi, dla których podstawę stanowią doświadczalnie wyznaczone funkcje rozkładu czasu przebywania. Parametry tych modeli są uśrednionymi wielkościami charakteryzującymi przepływ. W wielu przypadkach metoda opisu przepływu za pomocą funkcji rozkładu czasu przebywania nie jest wystarczająca.

Znacznie dokładniejszy opis przepływu można uzyskać poprzez zastosowanie metod numerycznej mechaniki płynów – CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Metoda CFD polega na numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych opisujących przepływ. Zastosowanie CFD pozwala na pełny opis przepływu poprzez wyliczenie rozkładu pola prędkości, ciśnienia, temperatury i innych wielkości w zależności od rodzaju przepływu. Programy CFD pozwalają na symulację przepływów laminarnych, turbulentnych oraz przepływu mieszanin wielofazowych. Przy użyciu tej metody można rozwiązać dwie klasy problemów. Po pierwsze, symulacje CFD pozwalają na pełny opis przepływu w istniejących układach. Po drugie, co jest szczególnie zaletą tych symulacji, dają one możliwość komputerowego projektowania układów przepływowych i wyznaczania optymalnych warunków ich pracy. Szybki rozwój mocy obliczeniowej komputerów oraz pojawienie się na rynku zaawansowanych komercyjnych programów do obliczeń CFD spowodował bardzo duży wzrost zastosowań tej metody w ostatnich latach. Zwiększające się zapotrzebowanie rynku komercyjnego na projektowe obliczenia CFD powoduje, że twórcy programów CFD dokonują ciągłego ich rozwoju. Współpraca z ośrodkami naukowo-badawczymi oraz ciągłe śledzenie literatury z tego zakresu jest podstawą rozwoju programów CFD. Dużą wagę przypisuje się doświadczalnej weryfikacji wyników symulacji CFD.

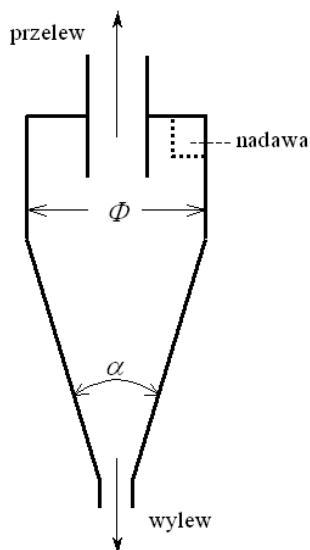
W kolejnych częściach rozdziału przedstawione są wyniki pomiarów z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych oraz wyniki symulacji CFD przepływu mieszaniny wody i fazy stałej w hydrocyklonie Φ -500 mm. Jest to hydrocyklon stosowany w procesie wzbogacania rudy miedzi. Przedstawione w pracy wyniki dotyczące rozkładu pola prędkości oraz rozkładu stężenia różnych frakcji granulometrycznych fazy stałej w hydrocyklonie przemysłowym nie były dotychczas w całości prezentowane, a tylko część z nich została opublikowana w pracy autora (Stęgowski i Nowak, 2007).

2.2. Zasada działania hydrocyklonu

Hydrocyklon jest urządzeniem przepływowym służącym do zagęszczania lub rozdziału granulometrycznego fazy stałej w mieszaninie woda-faza stała. Jest on powszechnie stosowany w przeróbce surowców mineralnych do rozdziału ziaren od kilku do kilkuset mikrometrów. Hydrocyklon jest urządzeniem złożonym z pięciu podstawowych elementów przedstawionych na rysunku 2.1. Zasadniczy korpus hydrocyklonu składa się z górnej cylindrycznej części o średnicy Φ i dolnej stożkowej charakteryzowanej przez kąt stożka α . Stycznie do części cylindrycznej znajduje się wlot, przez który wprowadzana jest mieszanina wody i cząstek fazy stałej z określoną prędkością (nadawa). Wlot ten może mieć przekrój kołowy lub prostokątny. W centralnej dolnej części hydrocyklonu jest cylindryczny otwór wylewowy a w górnej rura przelewowa. Otwór wylewowy jest otwarty, natomiast rura przelewowa łączona jest z rurociągiem odprowadzającym. Rura przelewowa jest zagłębiona do wnętrza cylindrycznej części hydrocyklonu.

Styczne położenie wlotu wywołuje cyrkulacyjny ruch materiału w hydrocyklonie. Materiał w pobliżu ścian bocznych, zarówno części cylindrycznej jak i stożkowej hydrocyklonu, wykonując ruch cyrkulacyjny stopniowo przemieszcza się w dół i ostatecznie wypływa poprzez otwór wylewy. W centralnej i górnej części hydrocyklonu pionowa składowa prędkość jest skierowana do góry i materiał z tego obszaru wypływa poprzez rurę przelewową.

W przypadku fazy stałej (o gęstości większej od wody) na poruszające się ziarna działa siła grawitacji i odśrodkowa wywołująca względny ruch cząstek w stosunku do wody. W efekcie tego im większe są rozmiary cząstek, tym bardziej przemieszczają się one w pobliże ścianek hydrocyklonu i ostatecznie wypływają poprzez wylew. Względemu przemieszczaniu się cząstek pod wpływem siły odśrodkowej przeciwdziałają siły oporu ośrodka. Siły oporu zależą od wielkości cząstek, ich kształtu oraz lepkości efektywnej (lepkość molekularna i turbulenta). Dla małych cząstek lepkość ta praktycznie likwiduje efekt działania siły odśrodkowej, a w konsekwencji średni rozkład stężenia i prędkości tych cząstek jest taki sam jak wody. Ostatecznie przepływ tych cząstek jest identyczny jak przepływ wody.



Rys. 2.1. Przekrój hydrocyklonu

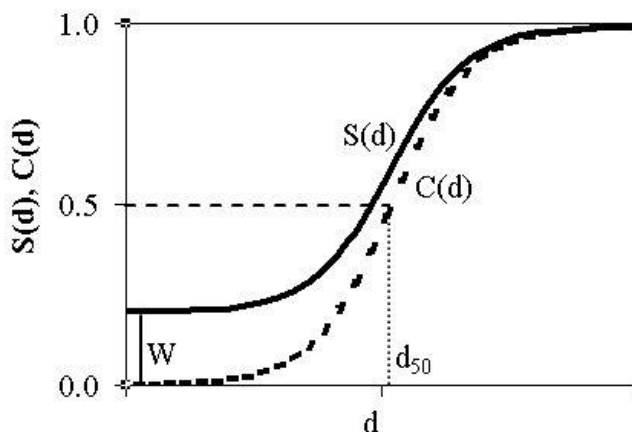
W przypadku hydrocyklonów służących do rozdzielania granulometrycznego fazy stałej podstawową charakterystyką ich pracy są krzywe rozdzielania i skorygowane krzywe rozdzielania. Nazwy te pochodzą z tłumaczenia angielskich nazw *partition curve* i *corrected partition curve* stosowanych przez Frachona i Cilliersa (1999). W pracy Kraipecha i in.

(2002) nazwane są one odpowiednio krzywą selekcji (*selectivity curve*) i krzywą klasyfikacji (*classification curve*). Ponieważ nie ma jednoznacznego nazewnictwa, w niniejszej pracy stosowane będzie pojęcie krzywej selekcji $S(d)$ i krzywej klasyfikacji $C(d)$. Krzywa selekcji zdefiniowana jest jako

$$S(d) = \frac{u(d)}{f(d)} \quad (2.1)$$

Funkcja $f(d)$ jest tutaj objętościowym natężeniem przepływu cząstek o wymiarze d wpływających do hydrocyklonu, a $u(d)$ odpowiadającym mu natężeniem przepływu tych cząstek wypływających poprzez wylew hydrocyklonu. Krzywa klasyfikacji $C(d)$ przedstawia rozdział cząstek w hydrocyklonie bez uwzględniania drobnych cząstek, które w takim samym stopniu jak woda przechodzą na wylew. Oznaczając przez W stosunek objętościowego natężenia przepływu bardzo małych cząstek na wylewie hydrocyklonu do odpowiadającego im natężenia na nadawie, funkcja $C(d)$ wyznaczana jest z zależności

$$C(d) = \frac{S(d) - W}{1 - W} \quad (2.2)$$



Rys. 2.2. Krzywa selekcji $S(d)$ i klasyfikacji $C(d)$ dla hydrocyklonu

Na rysunku 2.2 przedstawiono przykład krzywej $S(d)$, $C(d)$ oraz wielkości W . Ponadto na rysunku tym przedstawiono podstawowy parametr opisujący rozdział ziaren w hydrocyklonie, czyli ziarno podziałowe d_{50} . Ziarno podziałowe jest to taki rozmiar ziarna, dla którego funkcja $C(d)$ przyjmuje wartość 0,5 (50%) czyli

$$C(d_{50}) = 0,5 \quad (2.3)$$

Kształt krzywej selekcji $S(d)$ (a w konsekwencji krzywej $C(d)$ oraz parametrów W i d_{50}) zależy od wielkości i geometrii hydrocyklonu, natężenia przepływu i związanych z nim prędkości przepływu mieszaniny w tym stopnia turbulencji, stężenia objętościowego cząstek stałych ich gęstości oraz składu granulometrycznego.

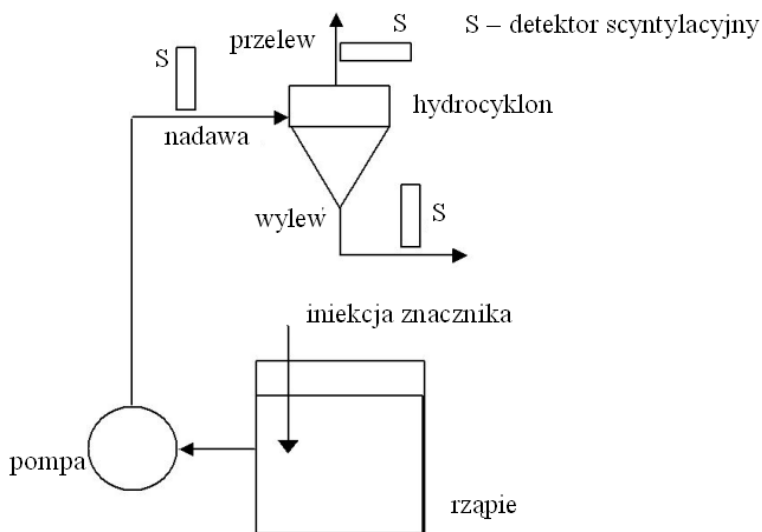
W literaturze z ostatnich kilkudziesięciu lat znajduje się wiele artykułów przedstawiających wyniki badań doświadczalnych jak i prób opisu teoretycznego klasyfikacji ziaren fazy stałej w hydrocyklonie. Szeroki przegląd tej literatury można znaleźć w pracach (Nageswararao i in. 2004 oraz Dwaria i in. 2004). Większość pomiarów oraz proponowane modele dotyczą wyznaczenia ziarna d_{50} oraz krzywej klasyfikacji $C(d)$. Proponowane modele są modelami półdoświadczalnymi wymagającymi doświadczalnego wyznaczenia wartości ich parametrów. Przegląd takich modeli, zwłaszcza do wyznaczenia d_{50} , przedstawiony jest w pracy (Nageswararao i in. 2004) natomiast model dla funkcji $C(d)$ w pracy (Frachon i Cilliers 1999).

W ostatnim dziesięcioleciu nastąpił istotny postęp w rozpoznaniu procesu rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie. Pierwszym elementem tego postępu jest zastosowanie nowoczesnych metod doświadczalnych do pomiaru rozkładu prędkości i stężenia objętościowego fazy stałej wewnątrz hydrocyklonu. Metodami tymi są: laserowa metoda pomiaru rozkładu prędkości (Dai i in. 1999, Chiné i Concha 2000, Fisher i Flack, 2002), metody optyczne (Wang i in. 2008), tomografia oparta na pomiarze oporu elektrycznego (Dyakowski i in. 2000, Bennett i Williams, 2004), tomografia ultradźwiękami (Schlaberg i in. 2000), pomiary znacznikowe (Stegowski i Leclerc 2002). Drugim elementem tego

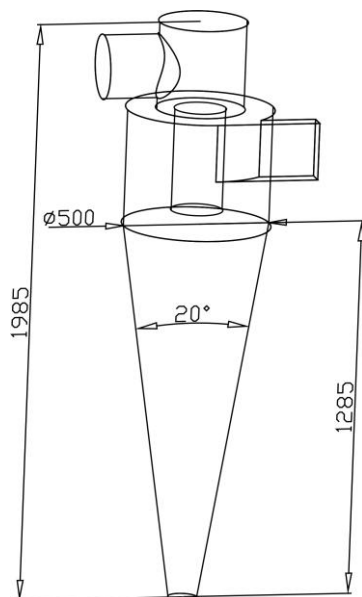
postępu jest zastosowanie komputerowych metod symulacji a zwłaszcza programów CFD. Przykłady zastosowań symulacji CFD można znaleźć w wielu pracach (Cullivan i in. 2004, Yang i in. 2004, Nowakowski i in. 2004, Olson i Van Omen, 2004, Slack i in. 2004, Stegowski i in. 2004, Narasimha i in. 2005, Stęgowski i Nowak, 2007, Brennan i in 2007, Wang i Yu, 2008, Mousavian i Najafi, 2009, Schütz i in. 2009). Większość tych prac dotyczy opisu hydrocyklonów o średnicy od kilku do kilkunastu centymetrów stosowanych w badaniach laboratoryjnych. Dla tych hydrocyklonów symulowany był przepływ wody, a dla fazy stałej prowadzone były symulacje przepływu pojedynczych cząstek.

2.3. Przemysłowe pomiary znacznikowe

W rozdziale 1.4.1 został opisany proces wzbogacania rudy miedzi. W pierwszym etapie mielenia do klasyfikacji rozdrobnionej rudy stosowany jest klasyfikator zwojowy opisany w rozdziale 1.4.3. W dalszych etapach procesu wzbogacania klasyfikacja przeprowadzana jest za pomocą hydrocyklonów. Związane to jest z charakterystyką parametrów klasyfikacji tych urządzeń. Klasyfikator zwojowy służy do rozdziału stosunkowo dużych cząstek, natomiast w hydrocyklonach rozdzielane są cząstki o wymiarach kilkudziesięciu mikrometrów. Pomiary znacznikowe przeprowadzone zostały dla hydrocyklonu Φ -500 mm. Schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 2.3, a dokładna geometria i podstawowe wymiary hydrocyklonu na rysunku 2.4. Głównym celem pomiarów było wyznaczenie doświadczalne krzywych selekcji cząstek rudy miedzi w tym hydrocyklonie. Do tego celu zostały przygotowane próbki rudy miedzi w zakresie pięciu klas ziarnowych o następujących rozmiarach ziaren d : $<45 \mu\text{m}$, $45-75 \mu\text{m}$, $75-100 \mu\text{m}$, $100-150 \mu\text{m}$ i $150-300 \mu\text{m}$. Przygotowanie znacznika promieniotwórczego oraz ogólna metodyka pomiarów była taka jak opisana w rozdziale 1.4.2. Dodatkowym wymogiem w tych pomiarach była konieczność kalibracji punktów pomiarowych. Intensywność promieniowania gamma, rejestrowanego przez dany detektor, jest proporcjonalna do aktywności przepływającego znacznika oraz zależy od geometrii i absorpcji fotonów γ przez materię w obrębie punktu pomiarowego.

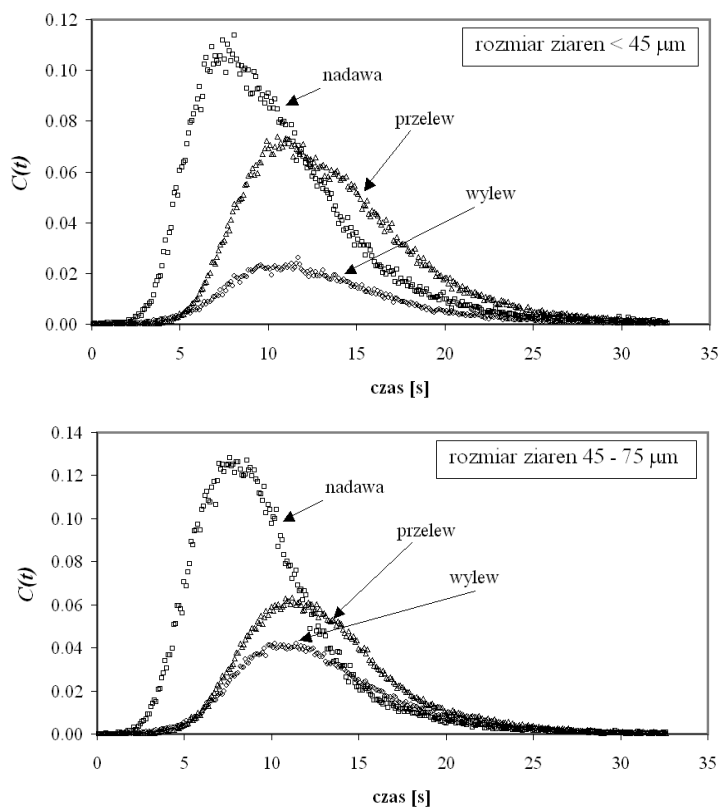


Rys. 2.3. Schemat układu pomiarowego

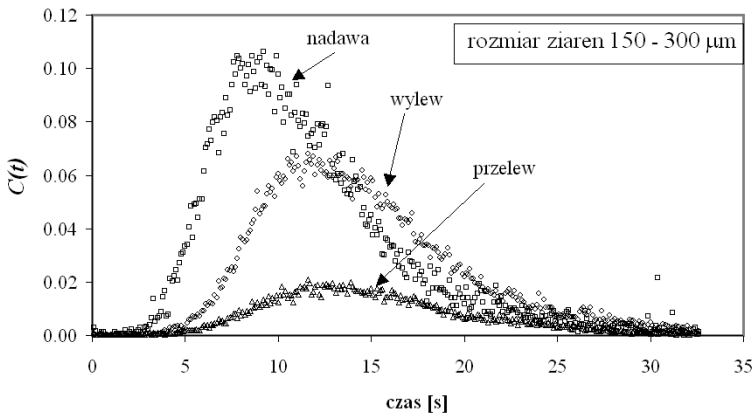
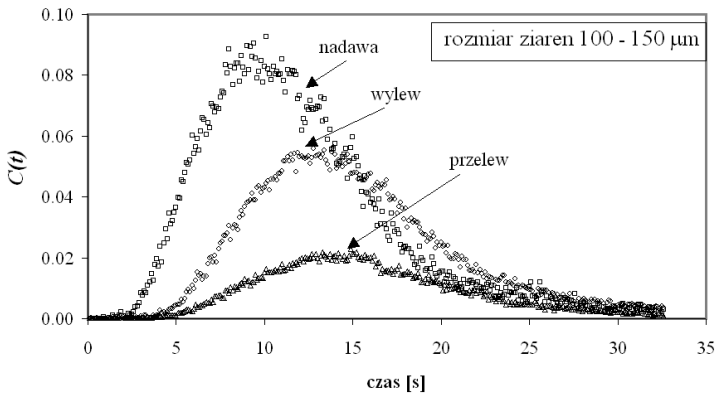
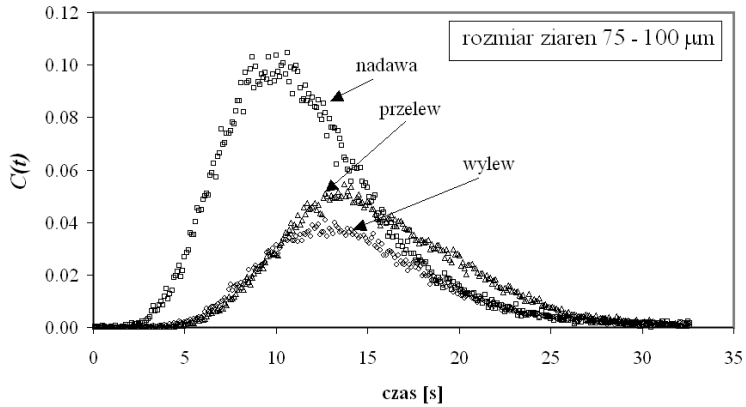


Rys. 2.4. Geometria i podstawowe wymiary hydrocyklonu
(wymiary podane są w milimetrach)

Współczynniki kalibrujące, pozwalające na przeliczenie tej intensywności na aktywność znacznika, zostały wyznaczone doświadczalnie. W tym celu zostały przygotowane małe porcje znacznika o znanej aktywności. Następnie były one oddzielnie injektowane przed punktami pomiarowymi na wylewie i wejściu hydrocyklonu. Pomiaru te pozwoliły wyznaczyć współczynniki zależności intensywności zliczeń od aktywności właściwej znacznika dla tych punktów pomiarowych. Dla punktu pomiarowego na przelewie względy techniczne nie pozwoliły na przeprowadzenie takich pomiarów. Współczynnik kalibracyjny dla tego punktu został wyznaczony z bilansu aktywności pomiędzy wejściem a wylewem i przelewem. Metoda ta pozwoliła na kalibrację doświadczalnych funkcji czasowych zmiany aktywności właściwych znacznika $C(t)$.



Rys. 2.5a. Przykładowe wykalibrowane funkcje $C(t)$



Rys. 2.5b. Przykładowe kalibrowane funkcje $C(t)$
(Stęgowski i Nowak, 2007).

Tabela 2.1. Doświadczalne wartości funkcji selekcji

rozmiar ziaren [μm]	<45	45-75	75-100	100-150	150-300
średnia wielkość ziaren [μm]	22,5	60	87,5	125	225
współczynniki selekcji	$0,26 \pm 0,06$	$0,40 \pm 0,06$	$0,45 \pm 0,06$	$0,70 \pm 0,06$	$0,85 \pm 0,06$

Na rysunkach 2.5a i 2.5b przedstawiono przykładowe wykalibrowane funkcje $C(t)$ uzyskane dla różnych wielkości cząstek rudy miedzi. Krzywe te są znormalizowane, co oznacza, że pole pod krzywą $C(t)$ dla wejścia jest równe 1. Natomiast dla przelewu i wylewu odpowiednie pola informują, jaka część rudy o danej granulacji przechodzi na dane wyjście. Zgodnie z równaniem 2.1 wartości tych pól dla wylewu dają doświadczalne wartości funkcji selekcji $S(d)$. Uzyskane w ten sposób wyniki przedstawione są w tabeli 2.1.

Przedstawiona w rozdziale 2.2 funkcja $S(d)$ jest podstawową charakterystyką opisu pracy hydrocyklonów klasyfikujących. Uzyskane doświadczalne wartości tej funkcji zostały wykorzystane do weryfikacji wyników symulacji CFD pracy hydrocyklonu, co zostało opisane w kolejnych rozdziałach.

2.4. Podstawy modelowania turbulentnego przepływu płynu

Opis stosowanych modeli przepływów turbulentnych stanowi obecnie bogatą bibliotekę wielu monografii oraz publikacji w czasopiśmie naukowych (Pope, 2000, Wilkes 1999). Ze względu na obszerność tego zagadnienia oraz zakres kompetencji autora w rozdziale tym zostanie omówiony model $k-\varepsilon$ (Launder i Spalding 1972), model RSM – *Reynold's Stress Model* (Launder i in. 1975), i jakościowo model LES – *Large Eddy Simulation* (Yakhot i in. 1989). Głównym celem tego rozdziału jest skrótowe przedstawienie podstaw teoretycznych do obliczeń CFD zastosowanych w prezentowanej pracy. Z tych też powodów podany poniżej opis dotyczy płynów nieściśliwych.

Wyjściowymi równaniami do opisu przepływu płynu jest równanie ciągłości oraz równanie Naviera-Stokesa dla przepływu laminarnego:

– równanie ciągłości przepływu dla płynu nieściśliwego

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.4)$$

– równanie Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} \quad (2.5)$$

gdzie:

\mathbf{U} – prędkość o składowych ($U_1 U_2 U_3$),

\mathbf{g} – przyspieszenie ziemskiego o składowych ($g_1 g_2 g_3$),

P – ciśnienie,

ρ – gęstość płynu,

μ – dynamiczny współczynnik lepkości molekularnej.

Równanie 2.5, po wprowadzeniu tensora naprężeń, można zapisać w postaci trzech równań skalarnych ($i = 1, 2, 3$) postaci

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.6)$$

lub w powszechnie stosowanym indeksowanym zapisie z pominięciem symbolu sumy (sumujemy wtedy po powtarzającym się indeksie)

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.7)$$

gdzie tensor naprężeń dla płynu nieściśliwego ma postać

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \text{ dla } i \neq j \quad (\tau_{ij} = 0 \text{ dla } i = j) \quad (2.8)$$

Współczynnik lepkości μ jest parametrem charakteryzującym płyn. Zakładając jego niezależność od parametrów przepływu równanie ciągłości oraz równanie Naviera-Stokesa stanowią cztery skalarne równania. Rozwiązaniem tych równań jest rozkład pola ciśnienia oraz pola prędkości. Układ takich równań ze względu na możliwość jego rozwiązania nazywa się układem równań domkniętych. W ogólnym przypadku lepkość jest funkcją temperatury. Jeżeli w przepływie mogą wystąpić istotne niejednorodności rozkładu temperatury to należy dodatkowo uwzględnić równanie zachowania energii i zależność lepkości od temperatury.

W naturze oraz w zagadnieniach techniki przepływy laminarne są rzadko spotykane. Najczęściej występujące przepływy to przepływy turbulентne. Turbulencje przepływu wprowadzają dodatkowe opory poprzez tworzenie się wirów powodujących wymianę elementów masy płynu o różnym pędzie. Wiry są wywoływane poprzez siły naprężeń ścinania, gdzie efekty bezwładności przekraczają efekty lepkości molekularnej. Tworzenie się i zanikanie wirów ma charakter stochastyczny. Badania eksperymentalne wykazały, że dla turbulентnych przepływów ustalonych (stałe warunki brzegowe) pole prędkości średnich i pole średnich prędkości kwadratowych fluktuacji są stałe. Dało to podstawy do sformułowania podstawowej teorii opisu dynamiki przepływów turbulентnych opartej na metodzie uśrednień Reynoldsa. W metodzie tej składowe prędkości chwilowej U_i rozkłada się na prędkość średnią u_i i prędkość fluktuacji u'_i

$$U_i = u_i + u'_i \quad (2.9)$$

Dokonując uśrednienia po określonym czasie otrzymujemy odpowiednie zależności na wartości średnie

$$\overline{U_i} = u_i \quad (2.10)$$

$$\overline{u'_i} = 0 \quad (2.11)$$

Analogiczne uśrednienie przeprowadza się dla ciśnienia

$$\overline{P} = p \quad (2.12)$$

W dalszym opisie ruchu turbulentnego stosowane są uśredniane wartości prędkości oraz ciśnienia. Natomiast efekty turbulencji opisywane są poprzez parametry rozkładu fluktuacji prędkości takie jak

$\overline{u_i^2}$ – średnia prędkość kwadratowa,

$\overline{u_i u_j}$ – korelacje pomiędzy składowymi fluktuacji prędkości.

Dla uśrednionych wielkości równanie Naviera-Stokesa przyjmuje postać

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u_i u_j} \quad (2.14)$$

Jest to tensor naprężeń turbulentnych (naprężeń Reynoldsa). Aby układ równań 2.13 był rozwiązywalny (domknięty) należy ustalić (określić model) dodatkowe równania wiążące tensor naprężeń Reynoldsa z uśrednionymi wielkościami przepływu (Hinze 1975). Przez analogię do naprężeń w przepływie laminarnym wprowadza się tensor naprężeń dla prędkości uśrednionych (hipoteza Boussinesquea)

$$\tau_{ij}^* = \mu_t S_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.15)$$

gdzie:

S_{ij} – tensor uśrednionych współczynników deformacji,
 μ_t – dynamiczny współczynnik lepkości turbulentnej.

Po wprowadzeniu zależności (2.15) w opisie przepływu pozostają tylko wielkości średnie oraz skalarna wielkość μ_t . Wielkość ta jest cechą przepływu (a nie tylko płynu), czyli jest funkcją pola przepływu. Aby ją określić należy przyjąć kolejne założenia modelowe. W celu „domknięcia”

równań opisujących przepływy turbulентne powstało wiele modeli wprowadzających dodatkowe funkcje lub równania transportu dla dodatkowo zdefiniowanych wielkości. Można tutaj wymienić modele algebraiczne, modele z jednym dodatkowym równaniem transportu (*Prandtl*, *Spalarta-Allmarasa*), modele z dwoma dodatkowymi równaniami transportu (k - ε , k - ω), model transportu naprężeń Reynoldsa (*RSM – Reynold's Stress Model*), model symulacji dużych wirów (*LES – Large Eddy Simulation*). Większość tych modeli wymaga określenia wartości pewnych stałych, wyznaczanych teoretycznie lub doświadczalnie. Jednym z częściej obecnie stosowanych modeli w symulacjach CFD jest model k - ε (Launder i Spalding 1972). W modelu tym wprowadza się dwie wielkości skalarnie charakteryzujące przepływ.

Wielkościami tymi są:

k – kinetyczna energia turbulencji (energia na jednostkę masy)

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (2.16)$$

ε – dyssypacja kinetycznej energii turbulencji
(energia na jednostkę masy i czasu)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)^2} \quad (2.17)$$

Wielkości te opisane są następującymi równaniami transportu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho a_i) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_K - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wielkość G_k opisuje generację kinetycznej energii turbulencji i wyliczana jest z zależności

$$G_k = \mu_t \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (2.20)$$

gdzie:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.21)$$

Występujące w tych równaniach wielkości $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, C_μ , σ_k i σ_ε są bezwymiarowymi stałymi wyznaczonymi teoretycznie lub półdoświadczalnie (FLUENT 2000). Model ten nazywany jest standardowym modelem k- ε i zawiera pięć stałych. Istnieją jeszcze dwie modyfikacje tego modelu. Modele te mają nazwę „wykonalny model k- ε ” (*realizable k- ε model*) (Shih 1995) oraz model k- ε RNG (*renormalization group methods*) (Yakhot i Orszag 1986). W modelach tych wprowadzane są dodatkowe zależności. W modelu „wykonalnym” współczynnik C_μ wyliczany jest poprzez tensor naprężeń oraz tensor wirowości pola prędkości średnich. W konsekwencji model zawiera cztery stałe. W modelu RNG wprowadza się dodatkową różniczkową zależność dla lepkości efektywnej (lepkość molekularna łącznie z lepkością turbulentną), dzięki czemu znikają dodatkowe stałe σ_k i σ_ε . Dokładne sprecyzowanie tych modeli można znaleźć w opisie programu FLUENT (2000).

Kolejnym modelem jest model transportu naprężeń Reynoldsa (RSM – *Reynolds Stress Model*). W modelu tym domknięcie układu równań 2.13 następuje poprzez wprowadzenie dodatkowych równań różniczkowych opisujących transport tensora naprężeń

$$\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u_i' u_j'} \quad (2.22)$$

W ogólnej formie równania te mają postać:

$$\frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tau_{ij}^*)}{\partial x_k} = -D_{L,ij} + D_{T,ij} + P_{ij} - \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (2.23)$$

Wielkości występujące po prawej stronie tego równania to

$$D_{L,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\tau_{ij}^*}{\rho} \right) \right] \quad \text{– dyfuzja molekularna,}$$

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \cdot \overline{u_i' u_j' u_k'} + p (\delta_{kj} u_i' + \delta_{ik} u_j') \right] \quad \text{– dyfuzja turbulentna,}$$

$$P_{ij} = \left(\tau_{ik}^* \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \tau_{jk}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad \text{– produkcja naprężeń,}$$

$$\phi_{ij} = p \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \quad \text{– naprężenia ciśnienia,}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} \quad \text{– dyssypacja energii turbulencji.}$$

Wszystkie te wielkości mają charakter zależności różniczkowych. $D_{L,ij}$ i P_{ij} są wyrażone poprzez wartości średnie i nie wymagają dalszego modelowania. Pozostałe wielkości są wyrażone poprzez fluktuację prędkości i do ich wyznaczenia wykorzystuje się odpowiednie zależności modelowe. Są to dość złożone zależności zarówno algebraiczne jak i różniczkowe wykorzystujące między innymi tensor naprężeń oraz tensor wirowości pola prędkości średnich. Zależności te wraz z odnośnikami

literaturowymi są przedstawione w opisie programu FLUENT (2000). Model ten posiada dziewięć stałych.

W programie FLUENT do modelowania lepkości turbulentnej są jeszcze do wyboru: model Spalarta-Allmarasa, model $k-\omega$ oraz model symulacji dużych wirów LES. Model Spalarta-Allmarasa posiada jedno dodatkowe równanie na transport kinetycznej lepkości turbulentnej. Pozostałe zależności mają charakter algebraiczny. W modelu tym występuje sześć stałych. Model $k-\omega$ jest modelem z dwoma dodatkowymi równaniami transportu dla k oraz ω . W modelu tym ω jest wirowością pola przepływu, a lepkość turbulentna wyrażana jest poprzez k i ω . Model ten zawiera dziewięć stałych. Model symulacji dużych wirów LES rozwinął się w momencie rozpowszechnienia się numerycznych metod rozwiązywania równań ruchu opisujących przepływy turbulenty. W modelu tym stosowane są uśrednienia w skali przestrzennej równej geometrycznym rozmiarom siatki dyskretyzacji. Turbulentna lepkość małych wirów modelowana jest przy założeniu ich jednorodności oraz poprzez rozmiary siatki i odległości położenia elementu siatki od najbliższej ścianki. Duże wiry wyliczane są z równania transportu. Model LES zawiera jedną stałą.

2.5. Podstawy modelowania przepływu mieszaniny ciec-z-faza stała

Do symulacji rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie wybrano model mieszaniny (*Mixture Model*), który pozwala na symulację przepływu wody (faza $j = 1$) i zadanej liczby faz frakcji stałej (fazy $j = 2$ do n) o różnych wielkościach cząstek. Model ten pozwala na wzajemne przenikanie się faz z uwzględnieniem prędkości poślizgu, wynikających z działania sił grawitacji i bezwładności. Do symulacji turbulencji przepływu stosowano różne modele opisane w rozdziale 2.4. W obliczeniach nie uwzględniano równań związanych z zachowaniem energii, ze względu na bardzo małą produkcję energii cieplnej w badanym przepływie a tym samym nieistotne zmiany temperatury, które mogłyby powodować zmianę parametrów przepływu. Podstawowe równania (FLUENT 2000) rozwiązywane w tym modelu to:

– równanie ciągłości przepływu masy dla mieszaniny

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m) = 0 \quad (2.24)$$

gdzie:

$$\rho_m = \sum_{j=1}^n \alpha_j \rho_j \quad \text{– gęstość mieszaniny,}$$

$$\mathbf{u}_m = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \rho_j \mathbf{u}_j}{\rho_m} \quad \text{– prędkość mieszaniny,}$$

j – indeks fazy,
 α_j – ułankowy objętościowy udział fazy j ,
 ρ_j – gęstość fazy j ,
 \mathbf{u}_j – prędkość fazy j .

– równanie ciągłości przepływu masy dla fazy wtórnej (j)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_j \rho_j) + \nabla \cdot (\alpha_j \rho_j \mathbf{u}_m) = -\nabla \cdot (\alpha_j \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_m)) \quad (2.25)$$

– równanie pędu mieszaniny

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \mathbf{u}_m) + (\mathbf{u}_m \nabla) \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_{mT}) +$$

$$+ \rho_m \mathbf{g} + \nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \rho_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_m)(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_m) \right) \quad (2.26)$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}_m$ i $\boldsymbol{\tau}_{mT}$ są tensorami naprężeń mieszaniny wynikającymi odpowiednio z lepkości molekularnej i turbulentnej

– równanie prędkość poślizgu pomiędzy fazami wtórnymi ($j > 1$) a fazą odniesienia ($j=1$) wyliczana jest z następującej zależności

$$\mathbf{u}_{j1} = \frac{(\rho_j - \rho_m) d_j^2}{18 \mu_1 f_j} \left(\mathbf{g} - (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_j - \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \right) \quad (2.27)$$

gdzie:

- d_j – średnica cząstek fazy j ,
- f_j – współczynnik siły oporu przepływu tych cząstek wyliczany z modelu Schillera-Naumanna

$$f_j = \begin{cases} 1 + 0.15 \text{Re}_j^{0.687} & \text{Re}_j \leq 1000 \\ 0.0183 \text{Re}_j & \text{Re}_j > 1000 \end{cases} \quad (2.28)$$

gdzie:

$$\text{Re}_j = \frac{\rho_1 |\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1| d_j}{\mu_1} \text{ jest względną liczbą Reynoldsa dla fazy } j > 1.$$

Analogicznie jak dla przepływu jednofazowego (rozdział 2.4) równania te wymagają „domknięcia” poprzez równania opisujące przepływ turbulentny. Postać równań opisujących turbulencje zależy od rodzaju wybranego modelu. Przykładowo dla modelu k - ε (FLUENT 2000) mają one następującą postać

– równania opisujące energię kinetyczną turbulencji (k)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m k) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m k) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G_{k,m} - \rho_m \varepsilon \quad (2.29)$$

– równania opisujące energię rozproszenia (ε)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m \varepsilon) = \\ = -\nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G_{k,m} - C_{2\varepsilon} \rho_m \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie:

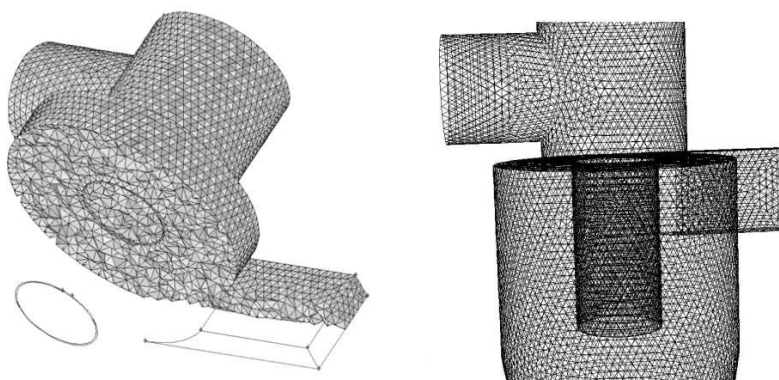
- $\mu_{t,m} = \rho_m C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ jest lepkością turbulentną,
- $G_{k,m}$ wyraża produkcję turbulentnej energii kinetycznej (równanie 2.20).

Występujące w równaniach wielkości $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, C_μ , σ_k i σ_ε są doświadczalnymi stałymi modelu k- ε .

2.6. Symulacje CFD dla hydrocyklonu

2.6.1. Parametry symulacji

Program FLUENT rozwiązuje układy równań przedstawionych w poprzednim rozdziale, w oparciu o metodę objętości skończonych (Zbeng i Bennet 2002). Do przygotowania geometrii hydrocyklonu i podziału jego objętości na siatkę elementarną zastosowano program GAMBIT. Z przeprowadzonych obliczeń okazało się, że zadawalająco stabilne wyniki uzyskuje się dla siatki *tetrahedral-hybrid* o liczbie komórek równej około 220 tysięcy. Rysunek 2.6 przedstawia wygląd siatki hydrocyklonu zastosowanej do obliczeń symulacyjnych.



Rys. 2.6. Wygląd siatki *tetrahedral-hybrid* dla górnej części hydrocyklonu

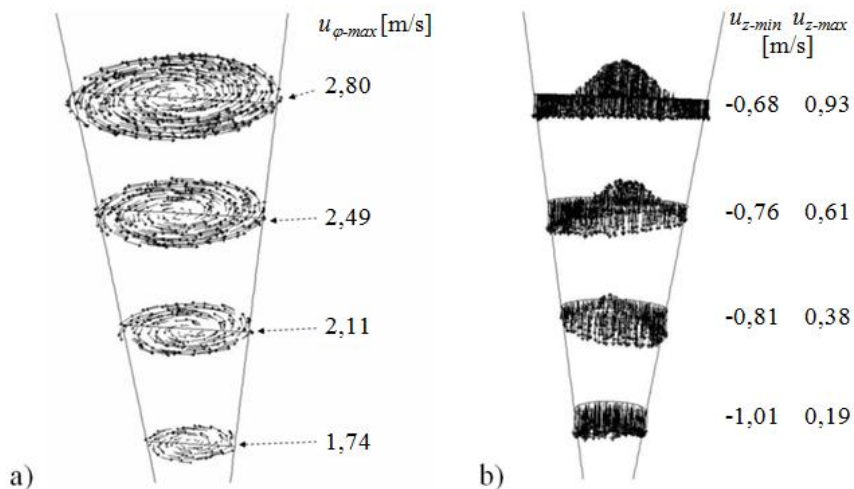
Na wejście hydrocyklonu wprowadzano mieszaninę wody (91% objętości) i fazy stałej (9% objętości) o gęstości 2800 kg/m^3 . Faza stała składała się z dziewięciu frakcji granulometrycznych, kulistych cząstek o średnicy ziaren: $d = 5, 10, 20, 50, 100, 150, 200, 300, 400 \text{ }\mu\text{m}$ i 1%

udziale objętościowym każdej z tych frakcji. Średnia gęstość mieszaniny wody i cząstek fazy stałej wynosiła 1160 kg/m^3 . Mieszanina ta wprowadzana była do hydrocyklonu pod ciśnieniem $122,025 \text{ kPa}$. Na obu wyjściach z hydrocyklonu (przelew i wylew) ciśnienie wynosiło $101,325 \text{ kPa}$. Niezależnie od warunków startowych procesu symulacji, stan ustalony przepływu mieszaniny w hydrocyklonie uzyskiwano po około 10 tysiącach iteracji. Symulacje te pozwoliły na wyznaczenie w obszarze hydrocyklonu przestrzennych profili prędkości, ciśnienia i turbulencji mieszaniny oraz prędkości i stężenia objętościowego poszczególnych frakcji mieszaniny. Dane te umożliwiły wyznaczenie uśrednionych wielkości przepływu i rozdziału mieszaniny w hydrocyklonie. Symulacje przeprowadzono dla czterech modeli lepkości turbulentnej: $k\text{-}\epsilon$ standardowy, $k\text{-}\epsilon$ RNS, RSM i LES. Przykładowe szczegółowe wyniki dla modelu RSM oraz podsumowujące wyniki dla wszystkich zastosowanych modeli są przedstawione w kolejnych rozdziałach.

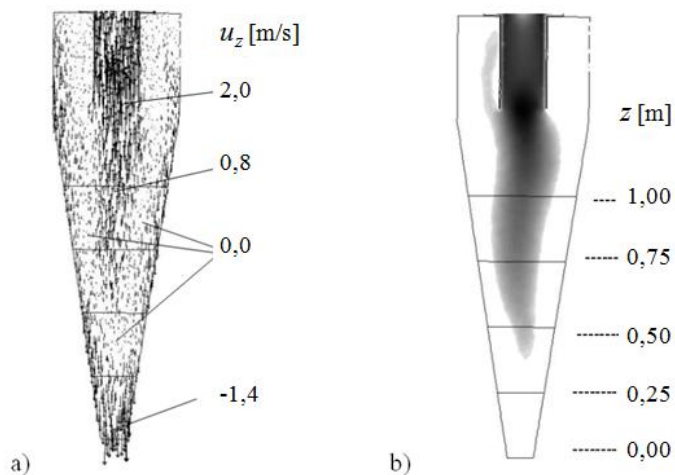
2.6.2. Rozkład pola prędkości

Styczne położenie wlotu hydrocyklonu w stosunku do jego części cylindrycznej powoduje, że wprowadzany materiał wywołuje silny ruch cyrkulacyjny w całej objętości hydrocyklonu. Na ten ruch cyrkulacyjny nakłada się ruch pionowy materiału, który w pobliżu ścianek zewnętrznych i w dolnej części hydrocyklonu skierowany jest w dół (do wylewu), natomiast w środkowogórnej części skierowany jest w górę (do przelewu). Przykładowe rozkłady prędkości mieszaniny na czterech poziomach stożkowej części hydrocyklonu przedstawiono na rysunku 2.7. Rysunek 2.7a przedstawia rozkłady prędkości cyrkulacyjnej mieszaniny a 2.7b składowe pionowe prędkości. Pionowe składowe prędkości dla dolnego przekroju na całej powierzchni skierowane są w dół. Dla wyższych przekrojów w części zewnętrznej powierzchni prędkość ta skierowana jest w dół (wartość ujemna), a w części środkowej do góry. Na rysunku 2.8a przedstawiono składowe pionowe prędkości na pionowym przekroju hydrocyklonu. Na tym rysunku można zaobserwować obszary, w których prędkość pionowa skierowana jest w dół, a w których do góry. Na rysunku 2.8b przedstawiono dokładnie obszar, gdzie prędkość pionowa

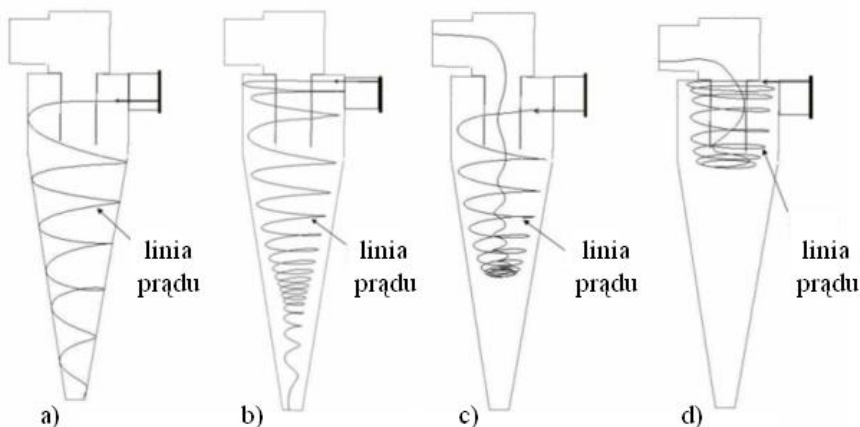
skierowana jest do góry (kierunek dodatni), czyli obszar z którego materiał przechodzi na przelew.



Rys 2.7. Rozkłady prędkości cyrkulacyjnej (a) i prędkości pionowej (b)



Rys 2.8. Rozkłady prędkości pionowej (a) i obszar dodatniej składowej tej prędkości (b)



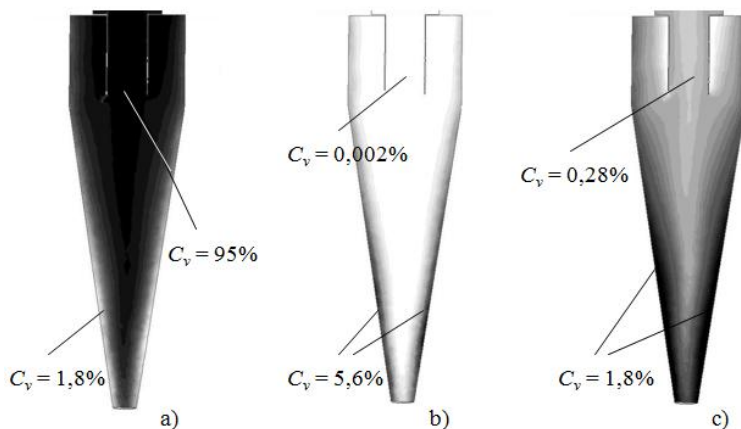
Rys. 2.9. Linie prądu prędkości średnich mieszaniny w hydrocyklonie

Na rysunku 2.9 przedstawiono cztery przykładowe linie prądu prędkości średnich mieszaniny w hydrocyklonie. Rysunek 2.9a przedstawia linię znajdującą się w pobliżu ścianek, która po sześciu cyrkulacjach przechodzi na wylew. Rysunek 2.9b przedstawia linię, która znajduje się w pewnej odległości od ścianek, ale cały czas jest w obszarze gdzie prędkość pionowa skierowana jest w dół i po osiemnastu cyrkulacjach przechodzi na wylew. Rysunki 2.9c i 2.9d przedstawiają linie przechodzące na przelew. W pierwszym przypadku linia przechodzi do obszaru unoszenia (prędkość pionowa skierowana do góry) w jego dolnej części, a w drugim przypadku osiąga ten obszar w jego górnej części.

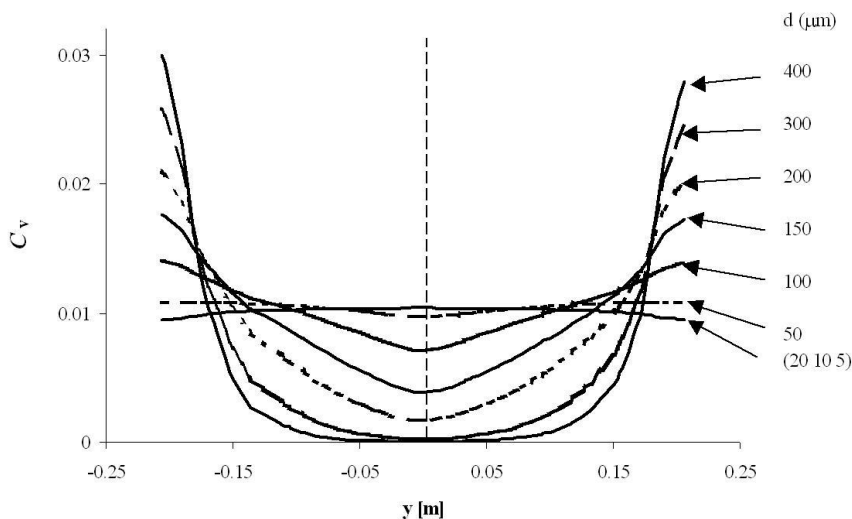
2.6.3. Rozkłady stężenia objętościowego faz

W rozdziale 2.6.2 omówiono i przedstawiono rozkłady prędkości mieszaniny w hydrocyklonie, ze szczególnym uwzględnieniem obszarów, z których materiał przepływa na wylew i przelew hydrocyklonu. O rozdziale cząstek fazy stałej decyduje zarówno rozkład prędkości jak i rozkład stężenia objętościowego tych cząstek. W zastosowanym modelu niejednorodny rozkład stężenia objętościowego cząstek fazy stałej wywołany jest siłą grawitacji i siłą odśrodkową cyrkulacyjnego ruchu

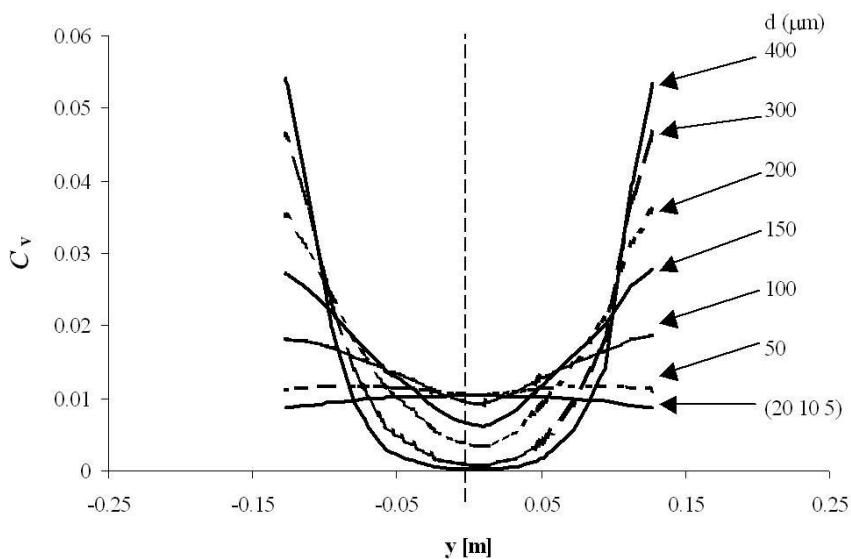
mieszaniny w hydrocyklonie. Siły te wywołują prędkość poślizgu pomiędzy cząstkami fazy stałej a wodą, co opisuje równanie 2.27. Oprócz rozkładu prędkości, na prędkość poślizgu ma wpływ gęstość fazy stałej oraz rozmiar cząstek d .



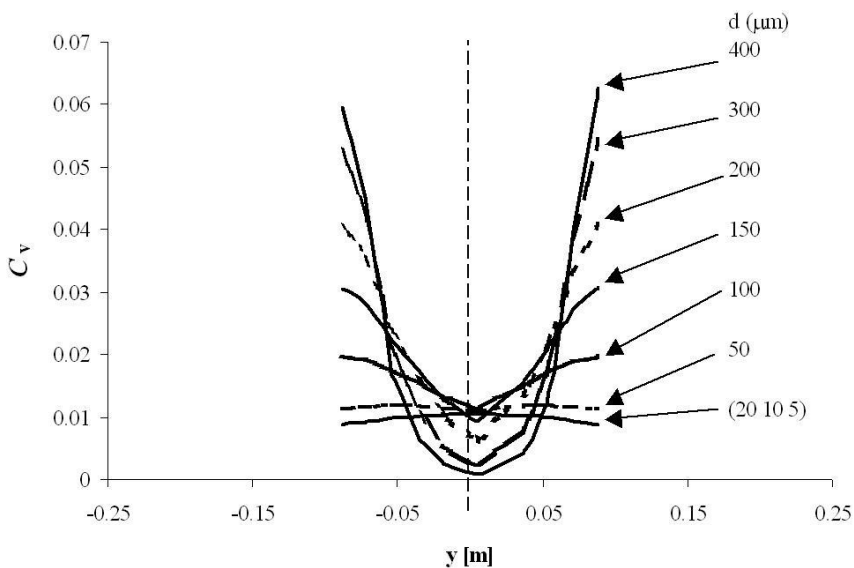
Rys. 2.10. Rozkłady stężenia objętościowego a) wody b) ziaren o średnicy 300 μm c) ziaren o średnicy 100 μm



Rys. 2.11. Rozkłady stężenia objętościowego cząstek fazy stałej na wysokości $z = 1.0 \text{ m}$



Rys. 2.12. Rozkłady stężenia objętościowego cząstek fazy stałej na wysokości $z = 0.5$ m



Rys. 2.13. Rozkłady stężenia objętościowego cząstek fazy stałej na wysokości $z = 0.25$ m

Tabela 2.2. Ekstremalne stężenia objętościowe cząstek w pobliżu ścianek stożkowej części hydrocyklonu oraz na przelewie hydrocyklonu

rozmiar cząstek [μm]	5	10	20	50	100	150	200	300	400
C_v [%] w pobliżu ścianek	0,81	0,82	0,85	1,19	2,00	3,25	4,48	6,28	7,66
C_v [%] na przelewie	1,05	1,04	1,04	0,89	0,54	0,22	0,03	~0,00	~0,00

W przedstawionych badaniach gęstość fazy stałej była stała, natomiast różna była średnica ziaren (rozdział 2.6.1). Na rysunku 2.10 przedstawiono rozkład stężenia objętościowego w przekroju pionowym dla wody oraz cząstek fazy stałej dla ziaren o średnicy 300 i 100 μm . Dokładniejszy ilościowy obraz rozkładu stężenia objętościowego cząstek fazy stałej przedstawiono na rysunkach 2.11, 2.12 i 2.13 dla trzech poziomych przekrojów liniowych (rys. 2.8b).

Wyniki symulacji pokazują, że cząstki o dużej średnicy posiadają niejednorodny rozkład stężenia objętościowego i przepływają głównie w pobliżu bocznych ścianek hydrocyklonu, tak że w dolnej stożkowej części stężenie objętościowe wynosi od 4% do 7%. Należy pamiętać, że średnia stężenia objętościowego poszczególnych frakcji fazy stałej w n-dawie wynosi 1%. Ze zmniejszaniem się średnicy cząstek, ich rozkład stężenia objętościowego staje się coraz bardziej jednorodny i dla cząstek mniejszych od 50 μm stężenie to w całej objętości hydrocyklonu zawiera się pomiędzy 0,81% a 1,05%. Interesującym efektem jest to, że minimum stężenia małych cząstek (5, 10 i 20 μm) osiągane jest przy ściankach hydrocyklonu tam, gdzie duże cząstki osiągają maksimum. W tabeli 2.2 przedstawiono ekstremalne wartości stężenia objętościowego (C_v) dla poszczególnych frakcji fazy stałej osiągnęte przy ściankach hydrocyklonu i na jego przelewie.

2.6.4. Wartości uśrednione przepływu

W poprzednich rozdziałach zostały przedstawione rozkłady prędkości mieszaniny i stężenia fazy stałej w hydrocyklonie. Znajomość tych rozkładów pozwala na wyliczenie uśrednionych wielkości zarówno w całej objętości hydrocyklonu jak i na jego przelewie i wylewie. Wielkości na wejściu są zdeterminowane poprzez ustalone warunki początkowe (rozdz. 2.6.1). W tabelach 2.3 i 2.4 przedstawiono średnie wartości dla wejścia, przelewu, wylewu i całej objętości hydrocyklonu. W tabeli 2.3 są to średnie wartości dla gęstości mieszaniny natomiast w tabeli 2.4 średnie procentowe zawartości wody i poszczególnych granulacji fazy stałej. Wyniki te wskazują na dużą różnicę gęstości mieszaniny pomiędzy przelewem (1093 kg/m^3) a wylewem (1316 kg/m^3). Wynika to ze znacznego procentowego wzrostu udziału na wylewie cząstek większych od $50 \mu\text{m}$. Cząstki mniejsze od $50 \mu\text{m}$ są stosunkowo równomiernie rozłożone w całej objętości hydrocyklonu i ich przepływ jest praktycznie taki sam jak wody. Interesujące jest, że średnia gęstość mieszaniny w hydrocyklonie (1149 kg/m^3) jest mniejsza od średniej gęstości na wejściu (1160 kg/m^3). Wynik ten wyjaśnia średni procentowy udział w objętości hydrocyklonu cząstek dużych. Z tabeli 2.4 widać, że udział ten jest mniejszy od 1%, czyli podawanego na wejście hydrocyklonu. Wynik ten świadczy o tym, że duże cząstki przechodzące na wylew mają średnio krótszy czas przebywania w hydrocyklonie od pozostałych składników mieszaniny. Wniosek ten potwierdziły wyniki symulacji przepływu pojedynczych cząstek wybranych frakcji i wyznaczeniu ich średniego czasu przejścia na wylew hydrocyklonu. Dla każdej frakcji wykonano symulacje dla 480 cząstek, a średnie wartości czasu przejścia przedstawiono w tabeli 2.5.

Tabela 2.3. Średnie wartości gęstości mieszaniny na wejściu, przelewie, wylewie i całej objętości hydrocyklonu

	wejście	przelew	wylew	objętość
średnia gęstość [kg/m^3]	1160	1093	1316	1149

Tabela 2.4. Średnie wartości stężenia objętościowego wody i poszczególnych frakcji fazy stałej

cząski (μm)	średnie stężenie objętościowe [%]			
	wejście	przelew	wylew	objętość
5	1,00	1,04	0,91	1,00
10	1,00	1,04	0,92	1,00
20	1,00	1,02	0,95	1,00
50	1,00	0,93	1,16	1,00
100	1,00	0,66	1,78	1,00
150	1,00	0,37	2,45	0,95
200	1,00	0,18	2,90	0,89
300	1,00	0,03	3,24	0,79
400	1,00	0,00	3,34	0,73
woda	91,0	94,7	82,3	91,61

Tabela 2.5. Średnie wartości czasu przejścia (ŚCP) cząstek fazy stałej na wylewie hydrocyklonu

	rozmiar cząstek [μm]									
	woda	5	10	20	50	100	150	200	300	400
ŚCP [s] wylew	4,52	4,56	4,54	4,53	4,26	3,95	3,50	3,36	3,22	3,15

Tabela 2.6. Masowe natężenia przepływu mieszaniny, wody i poszczególnych frakcji fazy stałej

	natężenie przepływu [kg/s]		
	wejście	przelew	wylew
mieszanina	37,1	27,9	9,2
woda	33,8	26,4	7,4
cząstki [μm]			
5	0,37	0,289	0,081
10	0,37	0,288	0,082
20	0,37	0,285	0,085
50	0,37	0,264	0,106
100	0,37	0,197	0,173
150	0,37	0,118	0,252
200	0,37	0,058	0,312
300	0,37	0,010	0,360
400	0,37	0,001	0,369

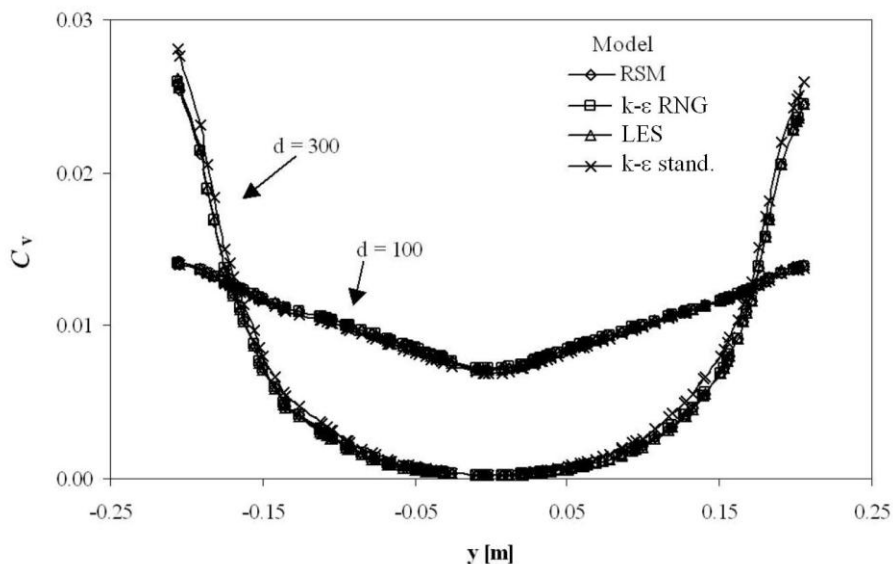
O końcowym efekcie rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie decydują natężenia przepływu na wejściu, wylewie i przelewie hydrocyklonu. W tabeli 2.6 przedstawiono uzyskane masowe natężenia przepływu dla mieszaniny, wody i poszczególnych frakcji fazy stałej. Dane te pozwalają na wyznaczenie krzywej selekcji i rozdziału, co zostało przedstawione w rozdziale 2.7.

2.6.5. Porównanie wyników dla różnych modeli

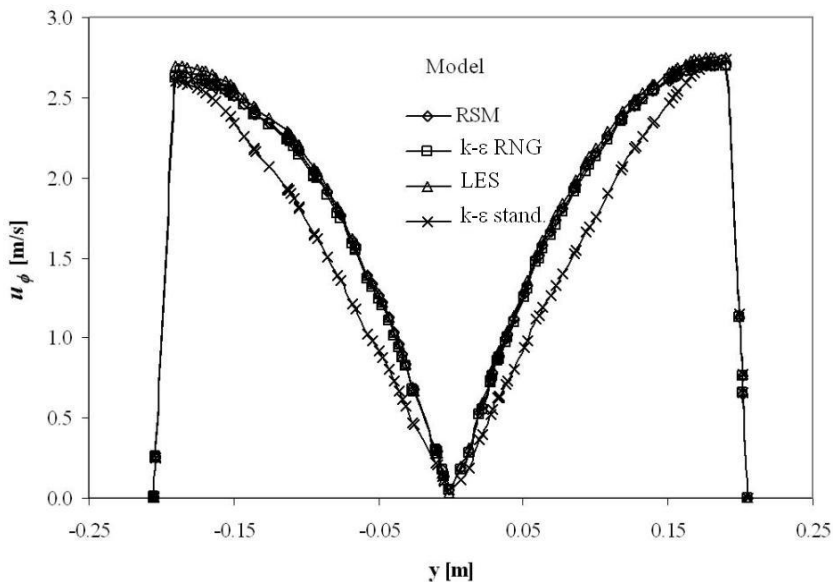
W poprzednim rozdziale przedstawiono szczegółowe wyniki uzyskane dla modelu RSM. Analogiczne symulacje przeprowadzono dla modeli k- ε standardowy, k- ε RNS i LES. Analiza uzyskanych wyników, dla rozkładu pola prędkości mieszaniny oraz rozkładu stężenia

objętościowego cząstek fazy stałej, wskazała na dużą zbieżność tych rozkładów dla modeli RSM, k- ϵ RNS i LES. Istotne różnice wystąpiły pomiędzy tymi trzema modelami a standardowym modelem k- ϵ . Przykładowe porównanie wyników dla tych modeli przedstawiono na rysunkach 2.14, 2.15 i 2.16. Wszystkie te rysunki pokazują rozkłady odpowiednich wielkości na liniowym poziomym przekroju hydrocyklonu w odległości 1 m od wylewu (rysunek 2.8b).

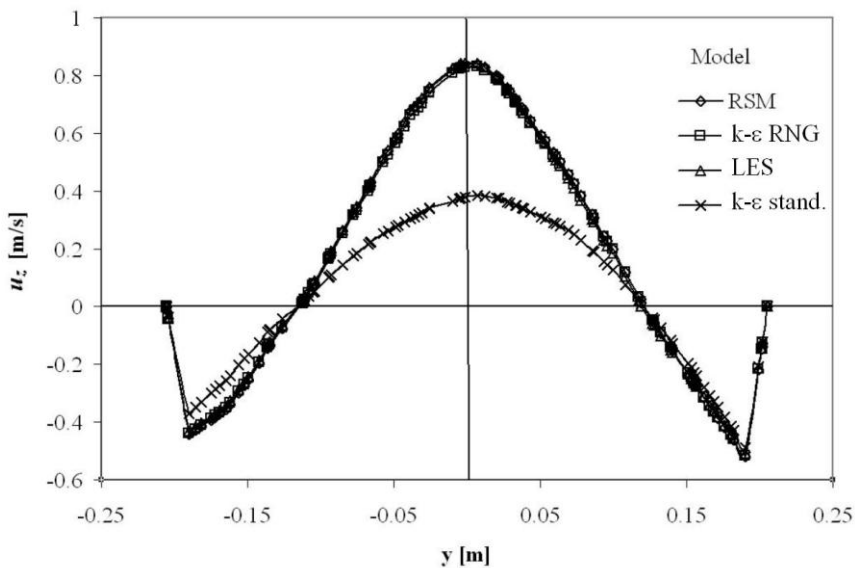
Rysunek 2.14 przedstawia rozkład stężenia objętościowego cząstek fazy stałej o rozmiarach 100 i 300 μm . W tym przypadku istotnie zauważalne różnice występują dla cząstek 300 μm . Stężenia objętościowe tych cząstek przy ściankach hydrocyklonu są większe dla standardowego modelu k- ϵ w stosunku do pozostałych modeli. Rys. 2.15 przedstawia rozkład prędkości cyrkulacji, gdzie występują analogicznie istotne różnice. Największe różnice występują dla rozkładu pionowej składowej prędkości, co zostało przedstawione na rysunku 2.16.



Rys. 2.14. Rozkłady stężenia objętościowego cząstek fazy stałej o rozmiarach 100 i 300 μm uzyskane dla różnych modeli



Rys. 2.15. Rozkłady cyrkulacyjnej prędkości mieszanki uzyskane dla różnych modeli



Rys. 2.16. Rozkłady pionowej składowej prędkości mieszanki uzyskane dla różnych modeli turbulencji

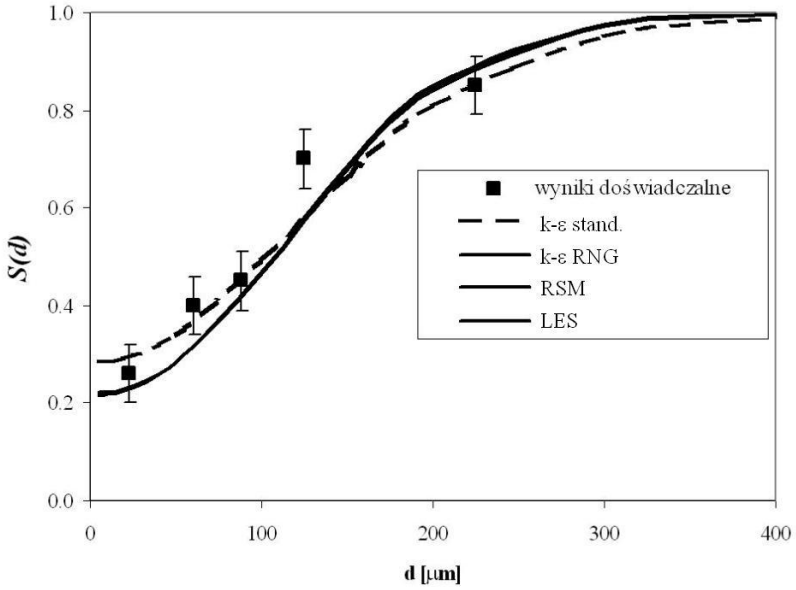
Występujące różnice są wynikiem generowania przez standardowy model $k-\varepsilon$ znacznie większych wartości lepkości turbulentnej w stosunku do pozostałych modeli. Najprawdopodobniej w takich przepływach występowanie dużych gradientów ciśnienia, prostopadłych do prędkości cyrkulacji, powoduje znaczne „skrępowanie” ruchu, czyli tłumienie zjawiska turbulencji, co nie jest odpowiednio modelowane w standardowym modelu $k-\varepsilon$.

2.7. Weryfikacja i predykcja klasyfikacji fazy stałej w hydrocyklonie

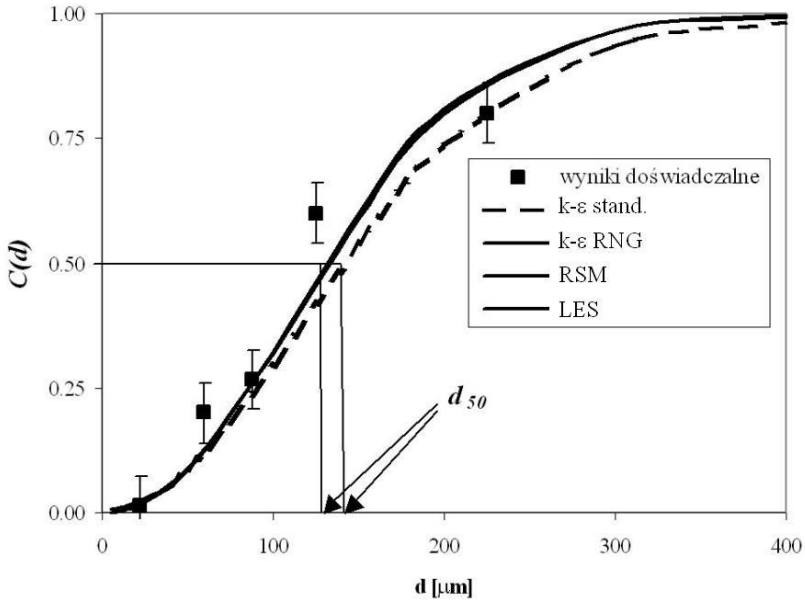
Przeprowadzone symulacje wykonano dla warunków porównywalnych z warunkami, dla których wykonane były pomiary znacznikowe. W obu przypadkach taka sama była geometria hydrocyklonu, gęstość mieszaniny i gęstość fazy stałej. Co do ciśnienia na wejściu hydrocyklonu przyjęto je na podstawie danych z założeń projektowych. Należy tutaj zaznaczyć, że pomiary znacznikowe wykonane zostały kilka lat przed podjęciem prac nad zastosowaniem CFD do symulacji pracy hydrocyklonu. Z tych względów odtworzenie wartości niektórych parametrów obciążone może być istotną niepewnością. W przemysłowych warunkach doświadczalnych rozkład granulometryczny cząstek fazy stałej był ciągły, a eksperymenty wykonane były dla określonych przedziałów wielkości cząstek. Ze względu na ograniczone możliwości programu i sprzętu komputerowego, w symulacjach granulometryczny rozkład cząstek fazy stałej miał charakter dyskretny i składał się z dziewięciu frakcji.

Zastosowany model oraz przeprowadzone obliczenia i uzyskane wyniki pokazały istotne możliwości zastosowania symulacji CFD do opisu pracy hydrocyklonu. Symulacje te pozwalają wyliczyć krzywe selekcji cząstek fazy stałej, czyli podstawowej charakterystyki pracy hydrocyklonu. Na podstawie danych doświadczalnych z tabeli 2.1 i danych symulowanych, na rysunku 2.17 przedstawiono krzywą selekcji $S(d)$ dla badanego hydrocyklonu. Na podstawie tych danych oraz zależności (2.2) na rysunku 2.18 przedstawiono odpowiednio krzywe klasyfikacji $C(d)$.

Dla wyników otrzymanych z symulacji istotna różnica występuje pomiędzy standardowym modelem $k-\varepsilon$ a pozostałymi modelami, dla których różnice są praktycznie nieistotne.



Rys. 2.17. Doświadczalne symulowane funkcje selekcji $S(d)$ dla badanego hydrocyklonu



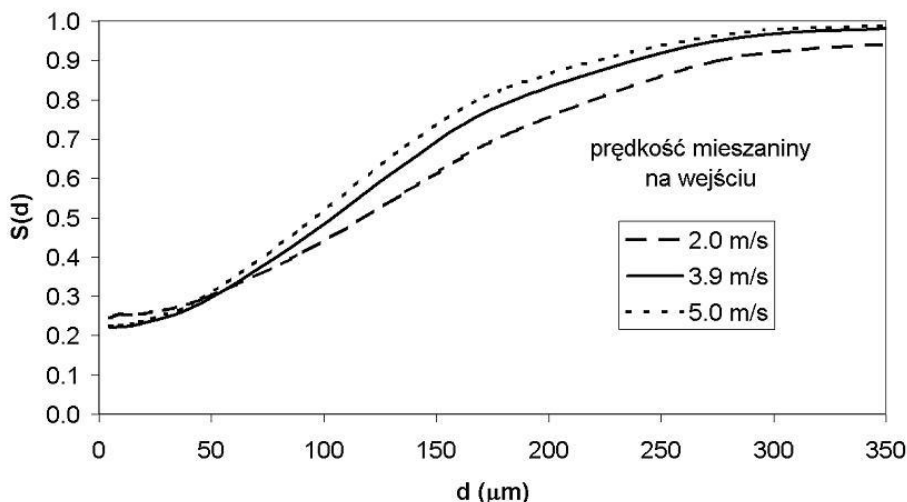
Rys. 2.18. Doświadczalne symulowane funkcje klasyfikacji $C(d)$ dla badanego hydrocyklonu

Istotna różnica dla standardowego modelu k- ϵ jest głównie wynikiem rozkładu pola prędkości (rozdział 2.6.5). Dla tego modelu obszar, z którego cząstki przechodzą na wylew jest mniejszy, a w konsekwencji ilość wody i drobnych cząstek przepływających na wylew jest większa. Parametr W w tym przypadku (patrz rozdział 2.2 oraz rysunek 2.2 i 2.18) wynosi 0,28 a dla pozostałych modeli 0,22. W przypadku ziarna podziałowego d_{50} to dla standardowego modelu k- ϵ wynosi ono około 140 μm a dla pozostałych modeli około 130 μm . Analizując wyniki doświadczalne można stwierdzić, że parametr W zawiera się w przedziale 0,20-0,32, a ziarno podziałowe d_{50} w przedziale 115-130 μm . Porównując dane doświadczalne z symulacjami CFD należy wziąć pod uwagę stosunkowo duże niepewności wyznaczenia doświadczalnych danych dla krzywej rozdziału $S(d)$ oraz prawdopodobne różnice pomiędzy rzeczywistymi parametrami przepływu a przyjętymi w obliczeniach symulacjach. Uwzględniając te niepewności nie można odrzucić hipotezy o zgodności danych doświadczalnych z obliczeniami symulacyjnymi. Z drugiej strony w konsekwencji tych niepewności nie można rozstrzygnąć, który z modeli przepływów turbulentnych poprawnie opisuje proces klasyfikacji w hydrocyklonie. Kierując się wnioskami innych autorów oraz faktem, że wyniki uzyskane ze standardowego modelu k- ϵ istotnie się różnią od wyników dla pozostałych modeli można postulować o nie stosowanie tego modelu do symulacji pracy hydrocyklonu.

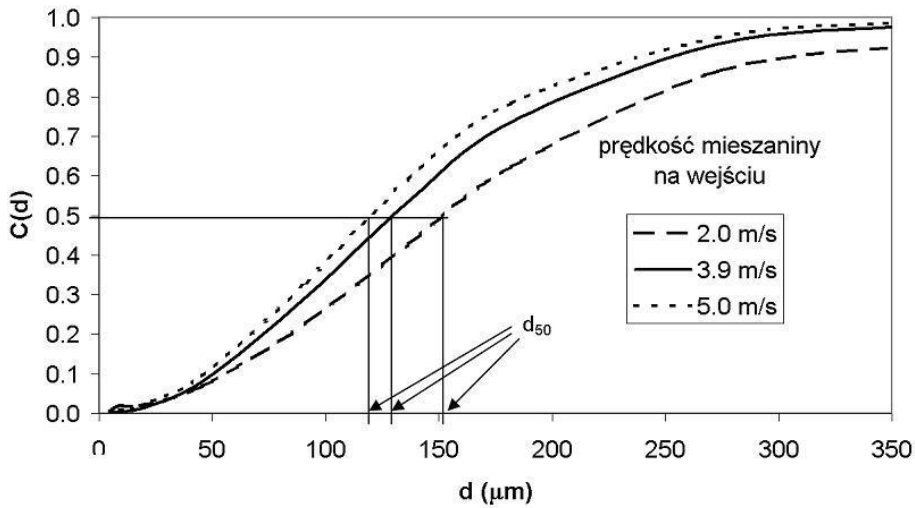
Przyjmując za prawdziwą tezę, że przeprowadzone symulacje przepływu mieszaniny w hydrocyklonie wystarczająco dobrze opisują ten proces, otrzymujemy dwa ważne wnioski. Pierwszy wniosek to możliwość poznania i opisu przepływu mieszaniny w hydrocyklonie. W tym przypadku należałoby stwierdzić, że w wyniku silnego ruchu cyrkulacyjnego przepływ mieszaniny jest silnie skrępowany. Oznacza to, że takie procesy jak wzajemne oddziaływanie cząstek fazy stałej oraz dyfuzja turbulentna dużych cząstek nie wpływa istotnie na ich przepływ. Drugi wniosek to możliwość predykcji parametrów pracy hydrocyklonu dla założonej jego geometrii i warunków przepływu. Oznaczałoby to, że proces symulacji mógłby być jednym z podstawowych elementów procesu

konstrukcji i ustalania warunków pracy hydrocyklonu dla zastosowań przemysłowych. Dla zobrazowanie możliwości predykcji pracy hydrocyklonu przeprowadzono dodatkowe symulacje dla zmienionych parametrów przepływu oraz rozmiarów hydrocyklonu.

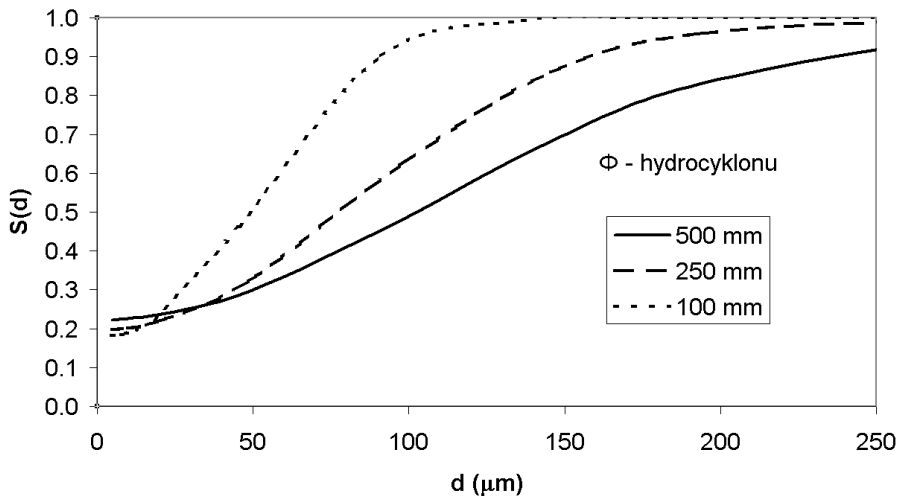
Dla omawianych wcześniej wyników prędkość mieszaniny na wejściu hydrocyklonu wynosiła 3,9 m/s. Dla tego hydrocyklonu i niezmiennych pozostałych warunków przeprowadzono symulacje dla prędkości mieszaniny na wejściu równej 2,0 i 5,0 m/s. Uzyskane wyniki krzywej selekcji $S(d)$ przedstawiono na rysunku 2.19 a krzywej klasyfikacji $C(d)$ na rysunku 2.20. Dla prędkości 2,0 m/s krzywa selekcji jest bardziej rozmyta i 6–8 % mniej grubych ziaren przechodzi na wylew hydrocyklonu. W konsekwencji ziarno podziałowe d_{50} (rys. 2.20) zwiększa się z około 130 μm do około 155 μm . Dla prędkości 5,0 m/s sytuacja jest odwrotna około 2–4% więcej grubych ziaren przechodzi na wylew hydrocyklonu, a ziarno podziałowe zmniejsza się do 120 μm .



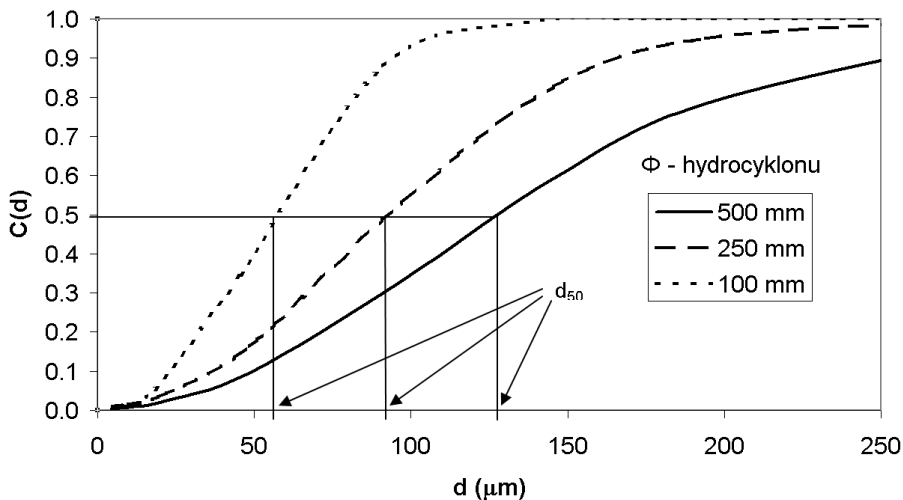
Rys. 2.19. Symulowane funkcje selekcji $S(d)$ dla różnych prędkości wlotu hydromieszanki



Rys. 2.20. Symulowane funkcje klasyfikacji $C(d)$ dla różnych prędkości wlotu hydromieszanki



Rys. 2.21. Symulowane funkcje selekcji $S(d)$ dla różnych rozmiarów hydrocyklonu



Rys. 2.22. Symulowane funkcje klasyfikacji $C(d)$ dla różnych rozmiarów hydrocyklonu

Kolejne symulacje przeprowadzono dla niezmiennego kształtu hydrocyklonu natomiast przeskalowywano jego wymiary. Wyjściowy hydrocyklon Φ -500 mm przeskalowano do rozmiarów Φ -250 i Φ -100 mm. We wszystkich przypadkach prędkość mieszaniny na wejściu wynosiła 3,9 m/s. Uzyskane wyniki krzywej selekcji $S(d)$ i odpowiednio krzywej klasyfikacji $C(d)$ przedstawiono na rysunkach 2.21 i 2.22. W tym przypadku obserwujemy wyostżanie się krzywej selekcji i zmniejszanie się ziarna podziałowego. Dla hydrocyklonu Φ -250 mm ziarno podziałowe zmniejsza się do około 90 μm a dla hydrocyklonu Φ -100 mm do około 60 μm .

2.8. Podsumowanie

Tak jak to zostało przedstawione w podrozdziale 2.1 w ostatnich kilku latach nastąpił duży rozwój możliwości badań doświadczalnych i komputerowych symulacji procesu rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie. Szczególnie istotna jest możliwość weryfikacji wyników

symulacji komputerowych za pomocą danych doświadczalnych. Proces takiej weryfikacji powoduje ciągły rozwój modeli stosowanych do symulacji przepływów.

Możliwości obliczeniowe i czasowe pozwoliły na wykonanie przedstawionych powyżej symulacji przepływu mieszaniny złożonej z wody i dziewięciu frakcji fazy stałej przy liczebności siatki 220 tysięcy. Obecnie istotniejszym zagadnieniem jest pełniejsza doświadczalna możliwość weryfikacji uzyskanych wyników. W przypadku hydrocyklonu, doświadczalne możliwości wyznaczenia toru cząstek fazy stałej dałyby wartościowe dane do weryfikacji modeli stosowanych w symulacjach. W pracy Bhusarapu'a (Bhusarapu i in. 2004) pokazano możliwość doświadczalnego wyznaczania toru cząstek za pomocą znaczników promieniotwórczych. W stosunku do całego zakresu badań układów przepływowych, metody z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych są słabo rozpowszechnione, a ich potencjalne możliwości są stosunkowo duże. Szeroki przegląd stosowania tych metod w badaniach przemysłowych można znaleźć w pracy Axelssona (Axelsson i in. 2004).

Każdy model teoretyczny opisujący procesy rzeczywiste posiada określone ograniczenia, ponieważ uwzględnia pewne zjawiska, a pewne efekty zaniedbuje lub opisuje je za pomocą przybliżonych zależności. Model jest przydatny wtedy, gdy zjawiska w nim uwzględniane dominują w opisywanym procesie. Przedstawione wyniki badań są przykładem zastosowania modelu, który można uznać za wystarczająco dokładny do opisu rozdziału cząstek fazy stałej w hydrocyklonie.

Lepszą weryfikację wyników modelowania można by uzyskać poprzez wykonanie dokładniejszych badań doświadczalnych. Dla przepływów wielofazowych korzystne byłoby znakowanie poszczególnych faz różnymi izotopami promieniotwórczymi. W takim przypadku w tym samym czasie, czyli dokładnie dla tych samych warunków przepływu, można by zbadać przepływ wybranych faz. Dla badań hydrocyklonu oznaczałoby to znakowanie różnymi izotopami wybranych frakcji granulometrycznych fazy stałej. W następnym rozdziale przedstawiona jest metoda badań znacznikowych z równoczesnym zastosowaniem różnych izotopów promieniotwórczych.

3. Metoda sztucznych sieci neuronowych w badaniach z użyciem wielu znaczników promieniotwórczych

3.1. Wprowadzenie

Przedstawione w poprzednich rozdziałach pomiary znacznikowe prowadzone były z użyciem jednego rodzaju izotopu promieniotwórczego. Jest to najczęściej stosowana metoda badań przepływowych układów przemysłowych. W pomiarach tych do rejestracji natężenia promieniowania γ , emitowanego przez izotop promieniotwórczy, stosowane są detektory scyntylacyjne. W detektorze scyntylacyjnym amplituda sygnału, na jego wyjściu, zależy od energii zdeponowanej przez foton γ w kryształ scyntylatora, czyli jest to detektor spektrometryczny. Przy stosowaniu jednego izotopu promieniotwórczego nie jest wykorzystywana możliwość analizy otrzymanego widma amplitudowego. W elektronicznym torze pomiarowym ustawiony jest tylko dolny próg dyskryminacji odcinający sygnały o małej amplitudzie związanej z elektronicznym „szumem” aparaturowym. Taka metoda pozwala na utrzymanie dużej wydajności procesu detekcji, dlatego że rejestracja fotonu następuje niezależnie od ilości zdeponowanej przez niego energii w scyntylatorze.

Obecnie możliwe jest stosowanie sond scyntylacyjnych z wbudowanym układem spektrometrycznym (wielokanałowym analizatorem amplitudy). Stosując taki układ i odpowiednią metodę analizy otrzymanego widma możliwe jest równoczesne stosowanie kilku izotopów promieniotwórczych, różniących się energią emitowanego promieniowania γ , do znakowania różnych faz przepływającego medium. Ze względu na stosunkowo słabą zdolność rozdzielczą oraz duży udział efektu Comptona, analiza widm z detektorów scyntylacyjnych nie jest prostym zagadnieniem (Nguen i in. 1996, Yamazaki i in. 2002, Volkovitsky i in. 2007, Owono 2010). W przypadku pomiarów znacznikowych istotne jest wykorzystanie całego zakresu widma amplitudowego tak, aby nie zmniejszyć wydajności procesu detekcji.

W dalszych częściach tego rozdziału przedstawiono metodę opartą na wykorzystaniu sztucznych sieci neuronowych do analizy widm z dete-

ktorów scyntylacyjnych otrzymywanych podczas pomiarów promieniowania zawierającego różne energie fotonów γ . Praktyczne zastosowanie tej metody zostało przedstawione na przykładzie wieloznacznikowych badań dyfuzji metali w stalach.

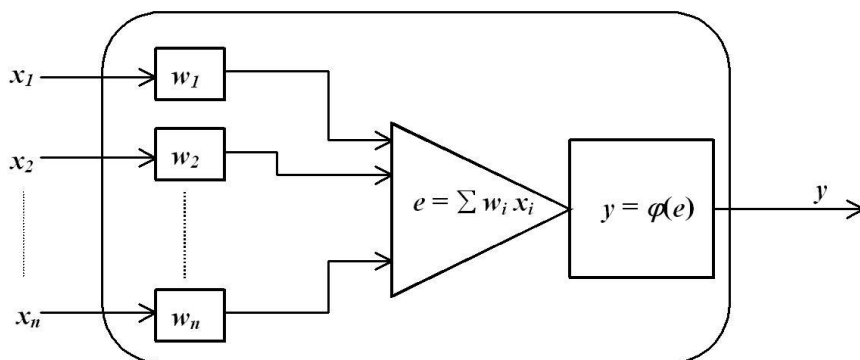
3.2. Opis sztucznych sieci neuronowych

W rozdziale tym omówione jest działanie sztucznej sieci neuronowej (SSN) z jednokierunkowym przepływem sygnału i przy zastosowaniu metody uczenia z „nauczycielem”. Wynika to z zastosowania w prezentowanej pracy tego typu sieci i tej metody uczenia. Czytelnik zainteresowany innego typu sieciami i metodami uczenia może znaleźć ich opis w literaturze (Tadeusiewicz 1993 oraz Korbicz i in. 1994).

Sztuczne sieci neuronowe są strukturami wzorowanymi na budowie i działaniu biologicznych systemów nerwowych. Rzeczywiste układy nerwowe można traktować jako bardzo złożone układy informatyczne, gdzie wszystkie operacje mają charakter procesów biologiczno-chemiczno-fizycznych. Operacje te można podzielić na: rejestrację i przesyłanie sygnału, zapamiętywanie i analizę uzyskanych informacji oraz w końcowym etapie odpowiedź układu. Wysoko rozwinięte układy nerwowe są układami silnie dynamicznymi, gdzie odpowiedź układu zależy nie tylko od rejestrowanych sygnałów, ale w dużym stopniu od aktualnego stanu pamięci. Również struktura układu nerwowego ulega ciągłym zmianom poprzez obumieranie komórek nerwowych oraz powstawanie nowych połączeń między komórkami nerwowymi. Pod koniec lat pięćdziesiątych i w latach sześćdziesiątych pojawiły się pierwsze prace (Neuman 1958, Taylor 1960) teoretyczne jak i praktyczne, mające na celu matematyczne opracowanie modeli sieci neuronowych i ich zastosowanie. Ze względu na teoretyczne ograniczenia możliwości zastosowań sieci jednowarstwowych oraz braku skutecznego algorytmu uczenia sieci wielowarstwowych, nastąpiła stagnacja tej dziedziny badań na ponad 20 lat. Opracowanie, w latach osiemdziesiątych, metody wstecznej propagacji błędu (Andersen i Rosenfeld 1988), pozwalającej na uczenie sieci wielowarstwowych, spowodowało istotny przełom w rozwoju badań i zastosowań sztucznych sieci neuronowych. Dodatkowo sprzyjającą sytuacją był silny rozwój

technologii komputerowych, jaki nastąpił w tym okresie. Obecnie sztuczne sieci neuronowe odgrywają istotną rolę w dziedzinie analizy i przetwarzania danych.

W sztucznych sieciach neuronowych funkcje rzeczywistych systemów nerwowych, jak również funkcje ich elementów składowych, czyli poszczególnych neuronów zostały w dużym stopniu uproszczone. Jednostkowe elementy sztucznych sieci neuronowych, nazywane neuronami, są odpowiednikiem neuronu biologicznego. Połączenia tych neuronów są analogią do aksonów i dendrytów łączących neurony w systemach biologicznych. Połączenia pomiędzy neuronami mogą mieć charakter pobudzający lub hamujący i w procesie uczenia efektywność tych połączeń może ulegać zmianie tak, aby dana sieć realizowała określone zadania. W przypadku sztucznych neuronów efektywność danego połączenia modelowana jest poprzez związaną z tym połączeniem modyfikowalną wagę w (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Model neuronu

Waga jest współczynnikiem liczbowym mogącym przyjmować zarówno wartości dodatnie dla połączeń pobudzających jak i ujemne dla połączeń hamujących. Wartość sygnału wyjściowego z neuronu obliczana jest w dwóch etapach. W pierwszym etapie sygnały wejściowe x przemnażane są przez odpowiadające im wagi i następnie sumowane. Etap ten nazywany jest funkcją wewnętrznego przetwarzania i w praktyce jest to najczęściej funkcja sumowania. Teoretycznie można realizować tutaj

dowolne inne funkcje takie jak: iloczyn, maksimum, minimum itp. W drugim etapie wynik funkcji wewnętrzznego przetwarzania e podlega działaniu określonej funkcji „wejścia-wyjścia” zwanej w tym przypadku funkcją aktywacji. Ostatecznie dla pojedynczego neuronu sygnał wyjściowy y wyliczany jest z następującej zależności

$$y = \varphi \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right) = \varphi(\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}) \quad (3.1)$$

gdzie:

\mathbf{X} – wektor danych wejściowych,

\mathbf{W} – wektor wag,

φ – funkcja aktywacji,

y – sygnał wyjściowy.

W praktyce najczęściej stosowane są cztery funkcje aktywacji przedstawione na rysunku 3.2 (Tadeusiewicz 1993). Ze względu na topologię rozróżniamy sieci jednowarstwowe i wielowarstwowe. W sieci wielowarstwowej występują: warstwa wejściowa, warstwy ukryte i warstwa wyjściowa (rys. 3.3). Połączenia między warstwami mogą mieć różną strukturę, lecz najczęściej są to połączenia zupełne, co oznacza, że każdy neuron danej warstwy połączony jest ze wszystkimi neuronami warstwy po niej następującej. W tego typu sieci przepływ sygnału ma charakter jednokierunkowy. Matematycznie funkcję realizowaną przez taką sieć możemy zapisać

$$\mathbf{Y} = \varphi_{wy} \{ \mathbf{W}_{wy} \cdot \varphi_{ukr} [\mathbf{W}_{ukr} \cdot \varphi_{we} (\mathbf{W}_{we} \cdot \mathbf{X})] \} \quad (3.2)$$

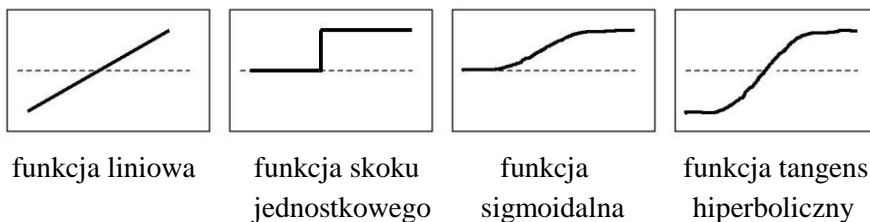
gdzie:

\mathbf{X} – wektor danych wejściowych,

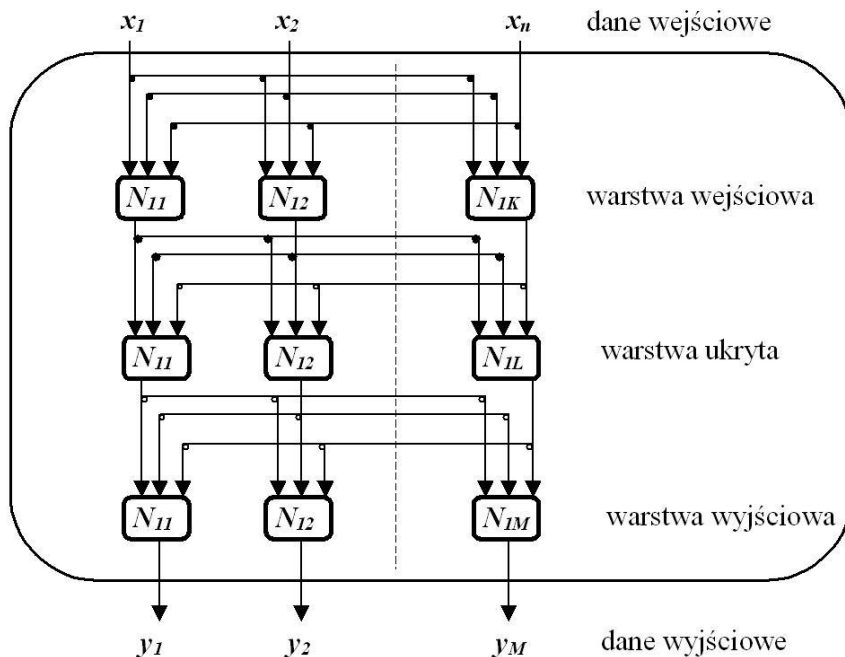
\mathbf{W} – macierz wag dla odpowiedniej warstwy,

φ – funkcja aktywacji dla odpowiedniej warstwy,

\mathbf{Y} – wektor danych wyjściowych.



Rys. 3.2. Podstawowe funkcje aktywacji



Rys. 3.3. Sieć trójwarstwowa o połączeniach zupełnych z jednokierunkowym przepływem sygnału

Celem działania takiej sieci jest realizacja określonej funkcji, czyli uzyskanie żądanej odpowiedzi przy zadanych wielkościach wejściowych. Cel ten uzyskuje się poprzez proces uczenia sieci, czyli odpowiednią zmianę wartości wag neuronów. Jedną z podstawowych metod uczenia jest

tak zwana „metoda z nauczycielem” (uczenie nadzorowane). W metodzie tej algorytm uczenia polega na przedstawieniu sieci zbioru uczącego, składającego się z danych wejściowych X i odpowiadającego mu zbioru danych wyjściowych Z . Zbiór danych wejściowych przetwarzany jest przez sieć a uzyskany wynik Y porównywany jest z posiadanymi danymi wyjściowymi Z . Różnica pomiędzy wartościami Y i Z stanowi podstawowy parametr do zmian wartości wag neuronów tak, aby osiągnąć minimum funkcji kryterialnej, którą standardowo stanowi suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami Y i Z .

Podstawową metodą minimalizacji funkcji kryterialnej jest gradientowa metoda największego spadku, z której otrzymujemy zależność na zmianę wartości wag w kolejnych krokach iteracji zwaną „regułą delta” (Tadeusiewicz 1993). Regułę tę można bezpośrednio stosować dla sieci jednowarstwowych. W przypadku sieci wielowarstwowych, kiedy sygnał z pierwszej warstwy nie jest sygnałem końcowym, konieczne było wprowadzenie dodatkowego algorytmu pozwalającego na równoczesną zmianę wag neuronów we wszystkich warstwach. Algorytm ten ze względu na jego działanie, czyli „rzutowanie” błędu z danej warstwy na warstwę poprzedzającą, został nazwany metodą „wstecznej propagacji błędu”. Jednymi z wielu zastosowań sztucznych sieci neuronowych są aproksymacje funkcji wielowymiarowych oraz klasyfikacje obrazów (sygnałów).

3.3. Analiza widm otrzymywanych z detektora scyntylicyjnego

3.3.1. Wprowadzenie

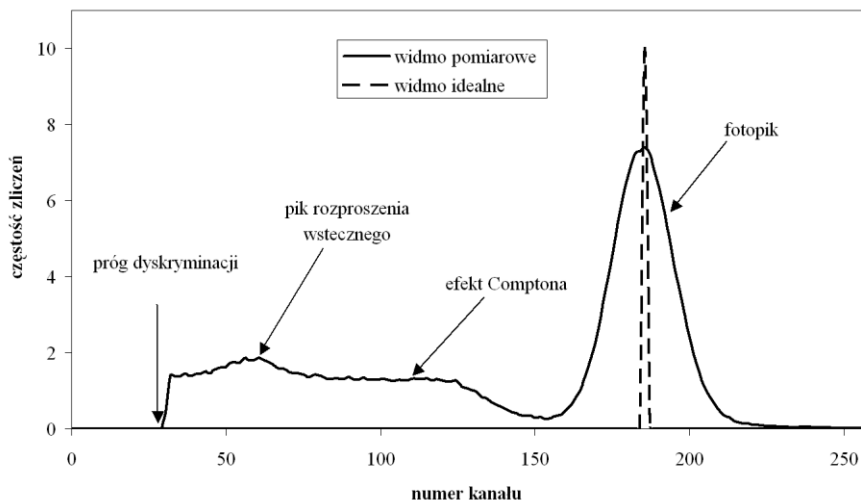
Jednym z zastosowań sztucznych sieci neuronowych jest przetwarzanie obrazu. Przetwarzanie to ma na celu eliminację szumów zawartych w pierwotnym obrazie i wypuklenie istotnych dla danego zagadnienia cech takiego obrazu. W takich przypadkach, jako szum traktowane są również elementy obrazu niebędące szumem w klasycznym ujęciu, lecz będące elementami przeszkadzającymi w uzyskaniu odpowiednio dokładnego obrazu o zadanych cechach. Przykładem takiego zniekształcenia obrazu jest proces detekcji promieniowania γ . W detektorach

promieniowania γ wykorzystuje się zjawiska jego oddziaływanie z materią. W większości detektorów zdeponowana energia fotonów γ zamieniana jest na impuls elektryczny. Idealny detektor powinien absorbować całą energię fotonu γ i na wyjściu dawać impulsy elektryczne o amplitudzie proporcjonalnej do tej energii. W takim przypadku dla energetycznego widma promieniowania γ otrzymywalibyśmy idealne widmo amplitudowe z detektora. W detektorach rzeczywistych występują istotne różnice pomiędzy idealnym a pomiarowym widmem amplitudowym.

Detektor scytylacyjny składa się z kryształu scytylatora, fotopowielacza i elektronicznego układu wstępnego przetwarzania sygnału. Podstawowymi procesami deponowania energii fotonów γ w takim detektorze są: efekt fotoelektryczny, efekt Comptona (rozpraszanie niekoherentne) oraz tworzenie par pozyton-elektron. Zjawisko tworzenia par pozyton-elektron może zachodzić dla fotonów o energii powyżej 1022 keV a jego istotny udział, w procesie detekcji, występuje dla fotonów o energii powyżej kilku MeV. Efekt fotoelektryczny polega na całkowitej absorpcji fotonu w kryształ scytylatora. W efekcie tym foton przekazuje całą swoją energię silnie związanemu w atomie elektronowi. Uzyskana energia kinetyczna takiego elektronu jest równa energii fotonu pomniejszonej o energię wiązania elektronu. Efekt Comptona polega na elastycznym rozproszeniu fotonów na swobodnych (słabo związanych) elektronach. W wyniku takiego oddziaływania tylko część energii fotonu przekazywana jest elektronowi, a pozostała jej część pozostaje w rozproszonym fotonie. Ilość w ten sposób zdeponowanej energii zależy od kąta rozproszenia i widmo tej energii ma ciągły rozkład. Rozproszone fotony, zarówno w scytylatorze jak i jego otoczeniu, mogą być ponownie rejestrowane w detektorze zarówno poprzez efekt fotoelektryczny jak i efekt Comptona.

Dla promieniowania γ o energii 662 keV widmo otrzymywane z detektora scytylacyjnego i zarejestrowane poprzez 256 kanałowy analizator amplitudy przedstawione jest na rysunku 3.4. Na rysunku tym przedstawiono również hipotetyczne widmo pochodzące z idealnego detektora. Widmo pomiarowe składa się z dwu części. Pierwsza część widma, w obszarze mniejszych amplitud, związana jest z efektem Comptona i ucieczką rozproszonych fotonów z detektora. Druga część

widma, zwana fotopikiem, związana jest z efektem fotoelektrycznym. Proces zamiany zdeponowanej energii w detektorze na wyjściowy sygnał elektryczny ma charakter statystyczny. Powoduje to, że dla zadanej wartości zdeponowanej energii występują fluktuacje amplitudy sygnału wyjściowego wokół określonej wartości średniej. W detektorze scyntylacyjnym fluktuacje te związane są ze statystycznym charakterem efektu scyntylacji, emisji elektronów z fotokatody oraz procesem powielania elektronów w fotopowielaczu. W sposób ilościowy fluktuacje te opisywane są za pomocą zdolności rozdzielczej detektora, która w postaci bezwymiarowej definiowana jest jako szerokość fotopiku w połowie jego wysokości do wartości położenia jego maksimum. W zależności od energii fotonów oraz parametrów detektora zdolność rozdzielcza detektora scyntylacyjnego wynosi od około 7 % do kilkunastu procent.



Rys. 3.4. Widmo z idealnego detektora i widmo pomiarowe z detektora scyntylacyjnego dla monoenergetycznego promieniowania γ

Ze względu na stosunkowo słabą zdolność rozdzielczą oraz duży udział efektu Comptona, zastosowanie detektora scyntylacyjnego do analizy spektrometrycznej wieloenergetycznych widm promieniowania γ jest trudne (Nguyen i in. 1996, Yamazaki i in. 2002, Volkovitsky i in. 2007, Owono 2010).

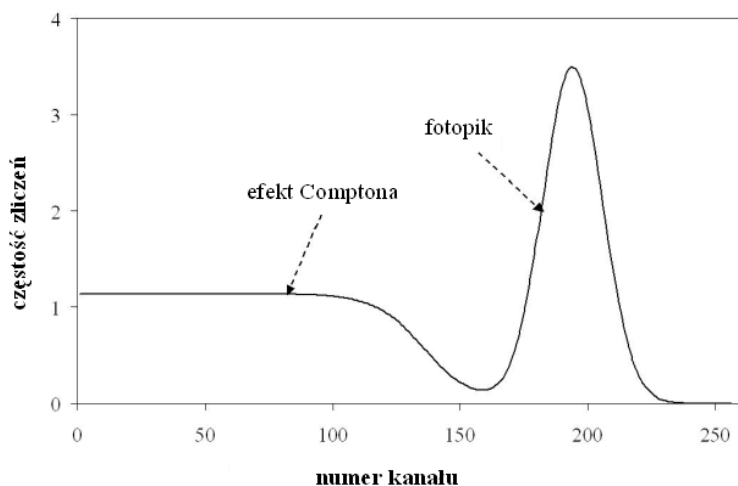
3.3.2. Transformacja widm symulowanych

W pierwszym etapie pracy przeprowadzono analizę możliwości transformacji widm w oparciu o dane symulowane (Stęgowski 2002). Na tym początkowym etapie pracy należało rozstrzygnąć, czy istnieje możliwość zastosowania metody sztucznych sieci neuronowych do przekształcania widma pomiarowego dla wieloenergetycznego promieniowania γ , otrzymanego z detektora scyntylicyjnego, w widmo z idealnego detektora. W przypadku uzyskania negatywnych wyników, kontynuowanie pracy dla rzeczywistych widm pomiarowych nie byłoby celowe.

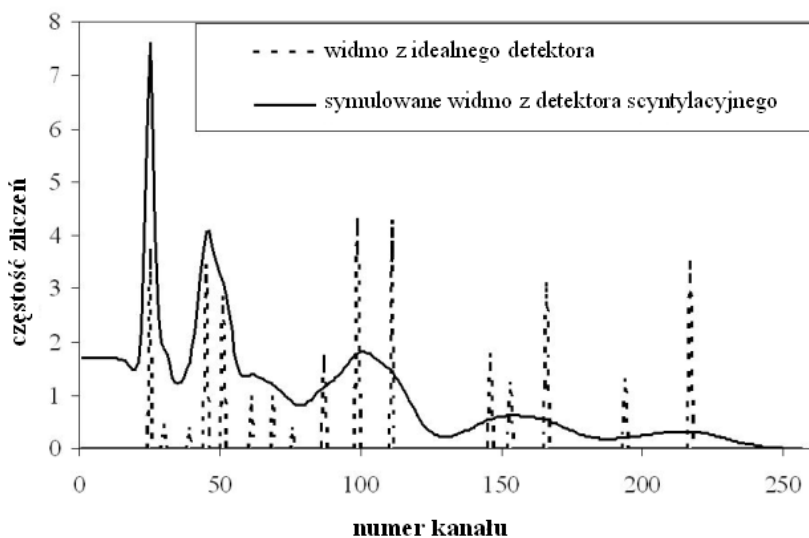
Amplitudowe widmo pomiarowe z detektora scyntylicyjnego dla monoenergetycznego promieniowania γ symulowane było jako złożenie dwóch funkcji. Za pomocą funkcji Gaussa symulowano kształt fotopiku, natomiast odpowiednio przekształcona funkcja tangens hiperboliczny symulowała amplitudową część widma związaną z efektem Comptona. Na rysunku 3.5 przedstawiony jest kształt tak symulowanego widma. W symulacjach tych przyjęto wartość zdolności rozdzielczej detektora równą 15%, czyli symulowany był detektor o bardzo słabej zdolności rozdzielczej. Uzyskanie w takim przypadku pozytywnych wyników dawałoby uzasadnione podstawy do stwierdzenia możliwości jej zastosowania dla detektorów o lepszej zdolności rozdzielczej.

Zarówno dla efektu Comptona jak i efektu fotoelektrycznego przekrój czynny na te zjawiska maleje ze wzrostem energii fotonów. Natomiast stosunek tych przekrojów nie jest stały i dla większych energii udział efektu Comptona w widmie pomiarowym jest większy w stosunku do efektu fotoelektrycznego (fotopiku). W symulacjach przyjęto, że ta zależność ma charakter liniowy. Na rysunku 3.6 (linia ciągła) przedstawiono przykładowe, symulowane widmo z detektora scyntylicyjnego w przypadku detekcji fotonów γ o szesnastu różnych energiach i różnym natężeniu promieniowania o danej energii. Na tym przykładzie widać, że rozdzielenie i ilościowe wyznaczenie natężenia promieniowania dla danej energii fotonu γ jest trudnym zagadnieniem. Idealnym odpowiednikiem tego widma byłoby widmo z idealnego detektora (rys. 3.6 – linia przerywana). Dla idealnego widma położenie piku w sposób jednoznaczny pozwala określić energię danego fotonu γ ,

natomiast wysokość pików jest wprost proporcjonalna do natężenia promieniowania o tej energii.



Rys. 3.5. Symulowane widmo z detektora scyntylacyjnego dla monoenergetycznego promieniowania γ



Rys. 3.6. Symulowane widmo z detektora scyntylacyjnego i idealnego

Proces detekcji fotonów γ w detektorze można potraktować jako pewną transformację matematyczną zamieniającą energetyczne widmo pierwotne w amplitudowe widmo pomiarowe. Jeżeli ta transformacja byłaby wzajemnie jednoznaczna to powinna istnieć transformacja odwrotna przekształcająca widmo pomiarowe w widmo idealne. Metodą sztucznych sieci neuronowych udało się uzyskać taką transformację odwrotną. Po przeprowadzeniu wielu prób obliczeniowych dla różnych architektur sieci neuronowych okazało się, że transformacja ta ma charakter liniowy, czyli wystarczy zastosować jednowarstwową sieć z liniową funkcją aktywacji.

Sieć taka składa się z szeregu neuronów liniowych znajdujących się w jednej warstwie, gdzie do każdego neuronu docierają wszystkie sygnały wejściowe, czyli n -elementowy wektor wejściowy \mathbf{X} . Każdy neuron ma swój własny zestaw wag, a wyjście każdego neuronu stanowi składową m elementowego wektora wyjściowego \mathbf{Y} . Taka sieć reprezentowana jest przez macierz \mathbf{W} o wymiarach $n \times m$, gdzie dany element w_{ij} oznacza wagę dla i -tego sygnału wejściowego i j -tego neuronu. W przedstawianym przypadku wartości n i m były takie same i wynosiły 256, co odpowiadało symulacji analizatora o 256 kanałach. Sieć taka realizuje następującą funkcję

$$y_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} \cdot x_i \quad (3.4)$$

co w zapisie wektorowym można przedstawić w postaci

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{X} \quad (3.5)$$

W omawianym zagadnieniu sieć powinna przekształcić widmo z detektora scyntylacyjnego (wektor \mathbf{X}) w widmo z idealnego detektora (wektor \mathbf{Y}). Aby to osiągnąć należało poddać sieć procesowi „uczenia”, czyli tak dobrać wartości macierzy \mathbf{W} , aby osiągnąć założony cel. W tym celu zastosowano metodę uczenia z „nauczycielem” (rozdz. 3.2). W przedstawianych badaniach zbiór wektorów \mathbf{X} składał się z $L=55$ symulowanych widm z detektora scyntylacyjnego. Widma te pochodziły z symulacji detekcji fotonów o 16 różnych energiach, a różnica pomiędzy tymi widmami wynikała z różnego natężenia liczby fotonów o danej

energii. W procesie uczenia dokonywana była zmiana wartości elementów macierzy \mathbf{W} tak, aby zminimalizować wartość funkcji kryterialnej K gdzie

$$K = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (Z_l - Y_l)^2 \quad (3.6)$$

Dla tak dobranej funkcji kryterialnej w kolejnych krokach uczenia macierz \mathbf{W} była zmieniana w następujący sposób

$$\mathbf{W}^{(k+1)} = \mathbf{W}^{(k)} + c \cdot (\mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k-1)}) + (1-c) \cdot h \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{X}^T \quad (3.7)$$

gdzie:

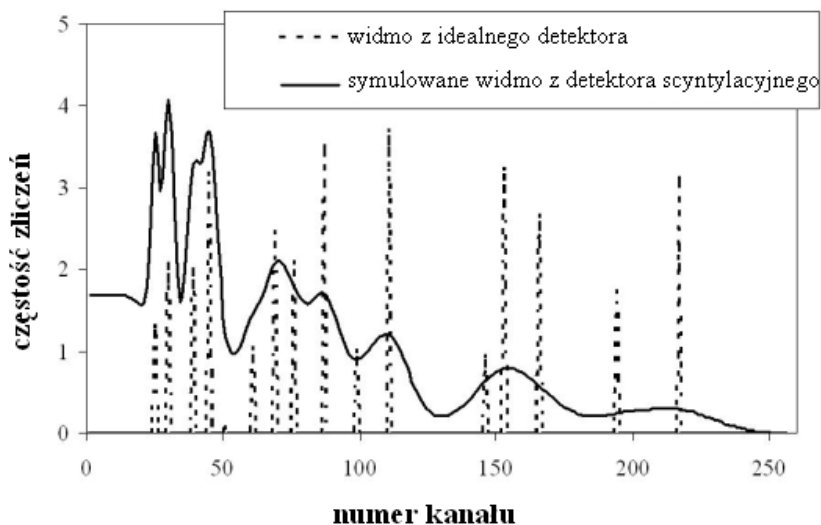
k – kolejny krok uczenia,

h, c – współczynniki uczące.

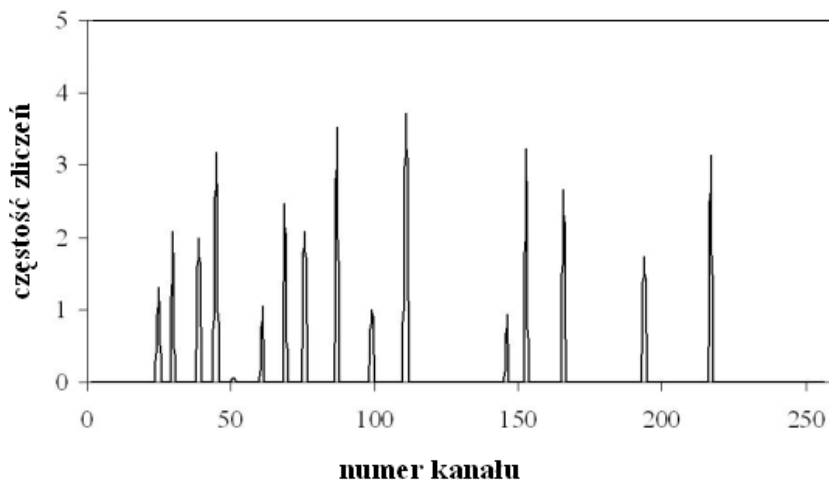
Do przeprowadzenia tych obliczeń opracowany został program w środowisku MATLAB z wykorzystaniem procedur biblioteki „Sieci Neuronowe”. Do realizacji procesu uczenia opisanego równaniem (3.7) zastosowano adaptacyjną metodę zmian współczynnika uczącego h . Metoda ta polega na zmianie wartości tego parametru w trakcie procesu uczenia tak, aby zminimalizować liczbę kroków uczenia k . W przedstawianych obliczeniach wartość współczynnika c przyjęto 0,95 natomiast współczynnik startowy h wynosił 0,001 i w trakcie adaptacyjnego uczenia był zwiększany o mnożnik 1,05 a zmniejszany o mnożnik 0,7. Po etapie uczenia najważniejszym krokiem jest proces testowania nauczonej sieci.

Proces ten polega na przygotowaniu zbioru testującego, składającego się z zadanej liczby wektorów \mathbf{X} i odpowiadającego mu zbioru wektorów \mathbf{T} (testujące). Zbiory te powinny być różne od zbiorów, na których sieć była uczona. Zbiór wektorów \mathbf{X} poddaje się przetworzeniu przez sieć (otrzymaną w procesie uczenia) i otrzymany w wyniku zbiór wektorów \mathbf{Y} , który porównuje się ze zbiorem \mathbf{T} . Na rysunku 3.7 pokazane jest przykładowe symulowane widmo, które po przetworzeniu przez sieć daje widmo idealne przedstawione na rysunku 3.8. Porównując rysunki 3.6 i 3.7 należy zwrócić uwagę na różnicę wysokości dla poszczególnych pików,

czyli na fakt, że sieć była uczona na widmach o innych kształtach w stosunku do kształtów widm, na których była testowana.



Rys. 3.7. Symulowane widmo z detektora scyntylicyjnego i odpowiadające mu widmo z detektora idealnego



Rys. 3.8. Symulowane widmo z sondy scyntylicyjnej (przedstawionej na rysunku 3.7) po przekształceniu przez sieć neuronową

Tabela 3.1. Historia uczenia się sieci neuronowej

Liczba kroków uczenia	100	500	1000	5000	10000	30000
położenie fotopiku (nr kanału)	Względny błąd średnio kwadratowy					
25	0,87	0,13	0,023	0,010	0,0016	0,0000016
30	0,38	0,11	0,025	0,001	0,0004	0,0000003
39	1,51	0,15	0,023	0,004	0,0006	0,0000007
45	2,82	0,25	0,038	0,013	0,0015	0,0000017
51	1,21	0,14	0,074	0,016	0,0029	0,0000029
61	2,20	0,20	0,099	0,024	0,0043	0,0000042
69	6,35	0,71	0,163	0,040	0,0079	0,0000075
76	3,13	0,14	0,048	0,005	0,0009	0,0000009
87	3,13	0,39	0,139	0,029	0,0055	0,0000054
99	8,01	1,37	0,272	0,023	0,0058	0,0000052
111	18,75	1,87	0,233	0,002	0,0036	0,0000022
146	11,32	2,34	1,490	0,369	0,0644	0,0000645
153	15,45	11,50	9,880	2,317	0,3965	0,0004001
166	9,81	3,93	2,456	0,543	0,0942	0,0000946
194	9,92	2,67	0,982	0,218	0,0376	0,0000378
217	2,88	1,33	0,456	0,030	0,0051	0,0000051

Tabela 3.1 przedstawia w sposób ilościowy dokładność odtwarzania widma idealnego z widma pomiarowego. Tabela ta zawiera również „historię” dokładności odtwarzania widma idealnego w funkcji liczby kroków uczenia. Za miarę dokładności odtworzenia danego piku przyjęto względny średni błąd kwadratowy wyliczony z 333 widm testujących. Uzyskane wyniki pokazują, że najwolniej sieć uczyła się rozpoznawania natężenia pochodzącego od fotonów o dużej energii i leżących bliska siebie (położenie fotopiku 146, 153 i 166). Pomimo tego po 30000 krokach uczenia, sieć odtwarzała wszystkie piki z błędem (niepewnością standardową) mniejszą od 0,001 (0,1%).

Łącząc taką sieć z detektorem scyntylacyjnym można uzyskać widmo idealne. Jak zawsze, tak i tutaj są pewne ograniczenia. Podstawowym ograniczeniem jest to, że taki układ nie rozpozna energii fotonu γ , jeżeli nie była ona uwzględniona w zbiorze uczącym. Dodatkowo wystąpienie takiej energii zafałszuje wyniki intensywności promieniowania od fotonów o energii zbliżonej do tej, dla której nie była uczona.

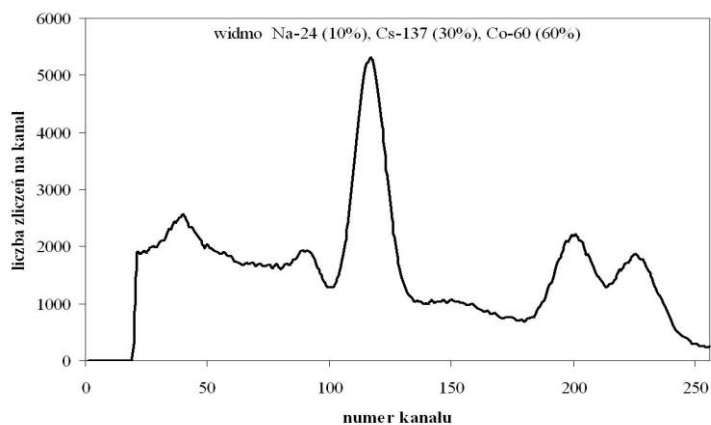
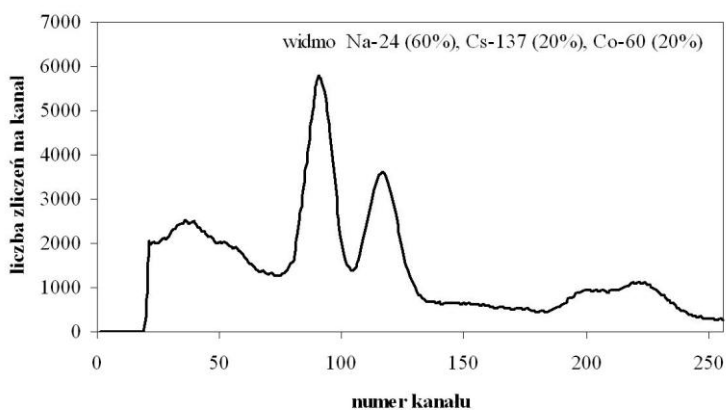
3.3.3. Transformacja widm pomiarowych

Kolejnym etapem pracy było przeprowadzenie badań nad transformacją rzeczywistych widm spektrometrycznych otrzymywanych z detektora scyntylacyjnego. Jako źródeł promieniowania γ użyto trzech izotopów promieniotwórczych: Na-22, Co-60 i Cs-137. Były to źródła zamknięte o stałej aktywności. Podstawowe parametry charakteryzujące te izotopy przedstawiono w tabeli 3.2. W pomiarach zastosowano klasyczny detektor scyntylacyjny NaI(Tl) z układem zasilającym i analizatorem wielokanałowym mierzącym widmo w 256 kanałach. Na rysunku 3.9 pokazano przykładowe widma pomiarowe przy różnym udziale natężenia promieniowania γ od poszczególnych izotopów.

W badaniach widma uzyskiwane były na dwa sposoby. W pierwszym przypadku wykonano oddzielne pomiary widm dla poszczególnych izotopów. Następnie widma te sumowano z różnym udziałem procentowym natężenia promieniowania od poszczególnych izotopów. W drugim przypadku dokonywano jednoczesnego pomiaru promieniowania pochodzącego od wszystkich trzech izotopów. W tym przypadku

Tabela 3.2. Parametry izotopów

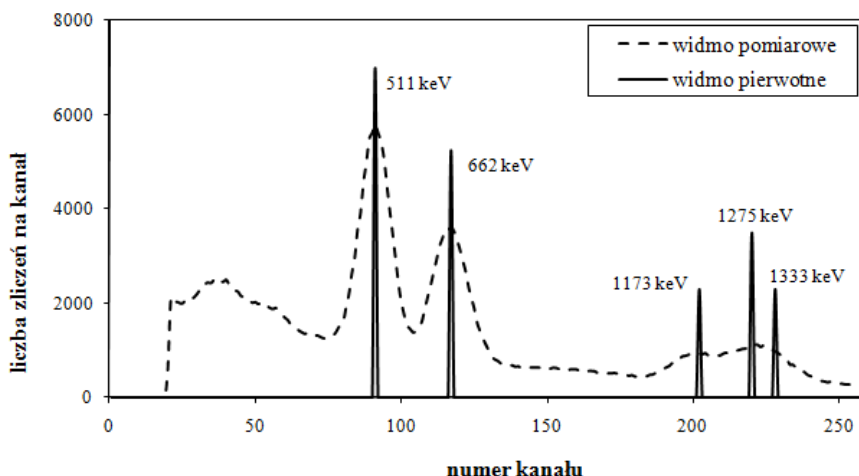
Izotop	Czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$	Energie fotonów [keV]	Emisja [%]
Na – 22	2,6 lat	511	200
		1275	100
Co – 60	5,3 lat	1173	100
		1333	100
Cs – 137	30 lat	662	85
		32-37 Ba K X	7



Rys. 3.9. Przykładowe widma pomiarowe

różny udział promieniowania od danego izotopu uzyskiwano poprzez zmianę odległości danego źródła od detektora. W obu przypadkach był wykonywany pomiar tła, które było odejmowane od uzyskanych widm pomiarowych. Metoda transformacji tych widm w widmo idealne oraz sposób uczenia i testowania sieci neuronowej były identyczne jak dla widm symulowanych. Przykładowy wynik takiej transformacji dla nauczonej sieci pokazano na rysunku 3.10.

W przypadku widm sumowanych względny błąd transformacji był mniejszy od 0,1%, a dla widm uzyskiwanych z jednoczesnego pomiaru wszystkich izotopów nie przekraczał 3%. Ten znacznie zwiększony błąd wynikał głównie z niedokładności określenia odległości źródła od detektora, co stanowiło podstawę wyznaczania udziału promieniowania danego izotopu w widmie pomiarowym.

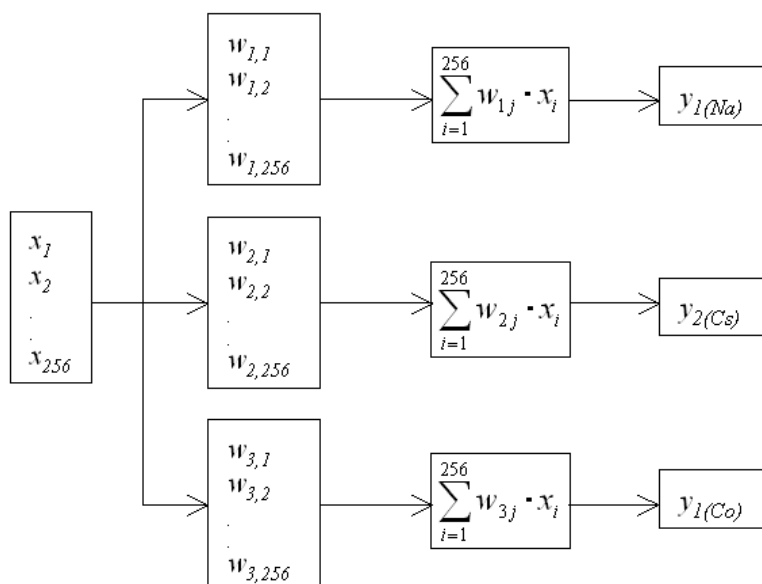


Rys. 3.10. Przykład widma pomiarowego i idealnego (pierwotnego) uzyskanego poprzez transformację siecią neuronową

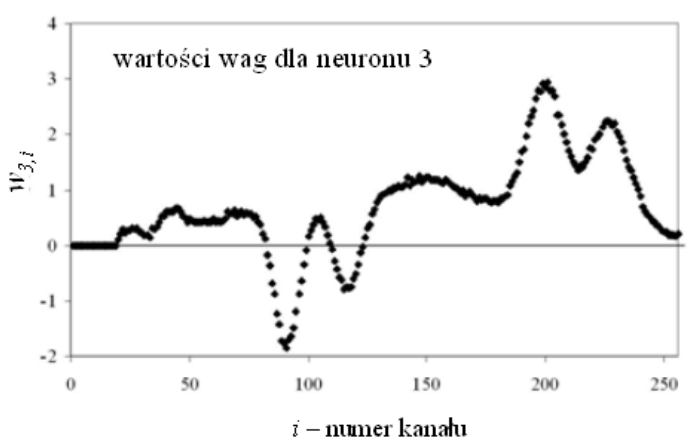
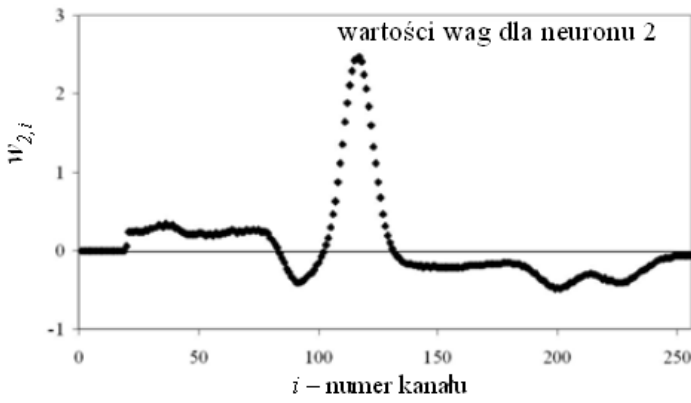
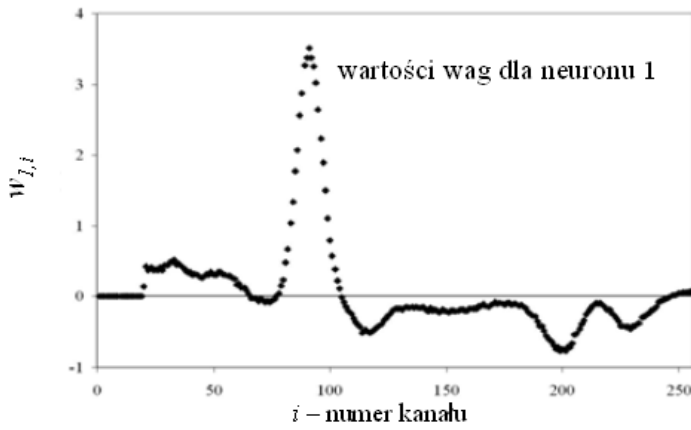
Tak jak zaznaczono w końcowej części rozdziału 3.3.2 przedstawiona metoda działa poprawnie, jeżeli w zbiorze uczącym uwzględnimy wszystkie energie promieniowania γ mogące wystąpić w badanej próbce. W praktyce odpowiada to uwzględnieniu wszystkich izotopów γ -promieniotwórczych mogących wystąpić w próbce. W takim

przypadku uzyskanie idealnego widma od promieniowania γ jest celem pośrednim na drodze do określenia natężenia promieniowania pochodzącego od poszczególnych izotopów. Uwzględniając ten cel oraz uzyskane wcześniej wyniki można było wnioskować, że jednowarstwowa sieć liniowa powinna wyznaczać te natężenia na podstawie widma pomiarowego. Dla osiągnięcia tego celu zaprojektowano jednowarstwową liniową sieć neuronową złożoną z trzech neuronów. Sieć taka, na podstawie widma z detektora scyntylicyjnego, powinna wyliczać natężenia promieniowania pochodzącego od stosowanych w pomiarach izotopów. Schemat takiej sieci przedstawiono na rysunku 3.11.

Na tym rysunku wektor wejściowy $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_{256})$ jest obrazem widma z detektora scyntylicyjnego, natomiast wektor wyjściowy $\mathbf{Y}(y_1, y_2, y_3)$ odpowiada natężeniom promieniowania γ od izotopów Na-22, Cs-137 i Co-60. Uczenie i testowanie działania tej sieci było analogiczne do przedstawionego w poprzednim rozdziale.



Rys. 3.11. Sieć neuronowa do wyznaczania zawartości izotopów γ -promieniotwórczych w próbce



Rys. 3.12. Wartości wag w poszczególnych neuronach

Ponieważ istnieje ścisły związek pomiędzy prezentowaną siecią a siecią transformującą widmo pomiarowe w widmo idealne, uzyskano analogiczne niepewności wyznaczenia udziału poszczególnych izotopów. Dla widm sumowanych była to niepewność mniejsza od 0,1%, a dla widm uzyskiwanych z jednoczesnego pomiaru wszystkich izotopów niepewność ta nie przekraczała 3%. Ciekawą obserwację można uzyskać analizując wartości wag dla poszczególnych trzech neuronów tej sieci. Na rysunku 3.12 przedstawiono wykresy wartości tych wag. Wagi te pokazują, w jaki sposób ze złożonego widma (rys. 3.10) poszczególne neurony wyliczają natężenia promieniowania od danego izotopu. Dodatkowo wartości wag są dla obszarów, z których wyliczana jest zawartość danego promieniowania i jest to obszar zarówno fotopiku jak i efektu Comptona. Ujemne wartości wag pokazują obszary związane z udziałem promieniowania od pozostałych izotopów i ich udział jest odejmowany. Takie działanie sieci neuronowej pozwala wykorzystać cały zakres amplitudowego widma pomiarowego do wyznaczania natężenia promieniowania od poszczególnych izotopów.

Jedną z potencjalnych możliwości zastosowania przedstawionej metody jest jej użycie w pomiarach z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych, gdzie stosowane są detektory scyntylicyjne. Wprowadzając do układu pomiarowego analizator wielokanałowy i sieć neuronową transformacją widma pomiarowe, można by było stosować w badaniach kilka znaczników promieniotwórczych jednocześnie.

3.4. Wieloznacznikowe pomiary na przykładzie wyznaczenia dyfuzji metali w stalach

W wielu urządzeniach przemysłowych ich elementy konstrukcyjne narażone są na działanie wysokich temperatur oraz agresywnej atmosfery. W przypadku metali powoduje to przyspieszoną korozję i utratę założonych własności konstrukcyjnych. Z tych względów prowadzone są badania nad nowymi materiałami oraz ich własnościami w różnych warunkach otoczenia. W latach 2003 – 2006 w Zakładzie Metod Jądrowych WFIS AGH prowadzone były badania dyfuzji metali w stalach chromowo-

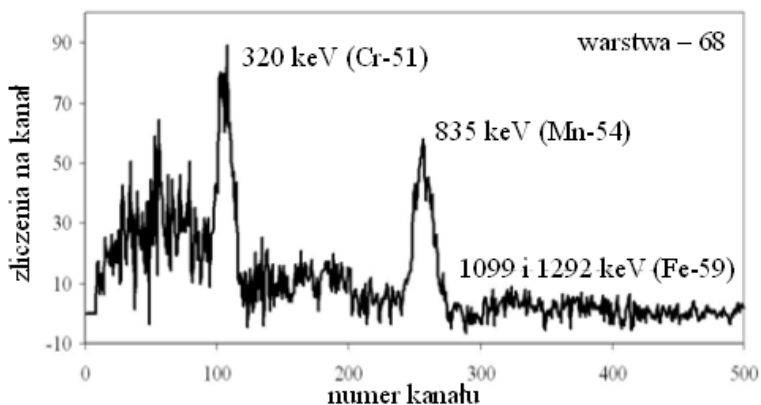
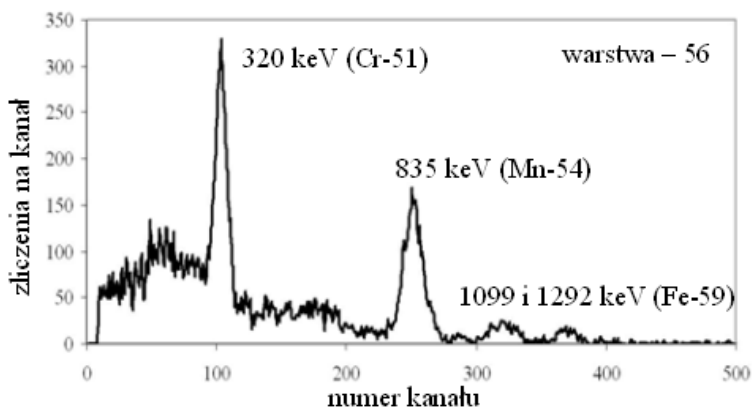
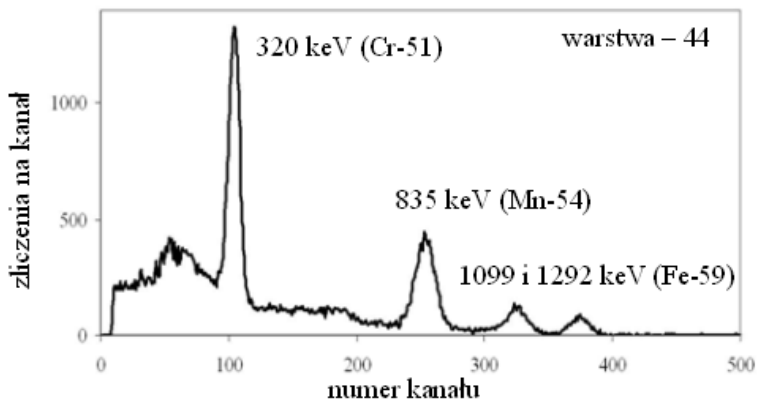
manganowych. W badaniach stosowano metodę znacznikową z równoczesnym zastosowaniem trzech znaczników promieniotwórczych: Cr-51, Mn-54 i Fe-59. Podstawowe parametry charakteryzujące te izotopy przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3. Parametry izotopów

Izotop	Czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$	Energie fotonów [keV]	Emisja [%]
Cr – 51	27,7 dni	320	9
Mn – 54	313 dni	835	100
Fe – 59	44,5 dni	1099	56,5
		1292	43,2

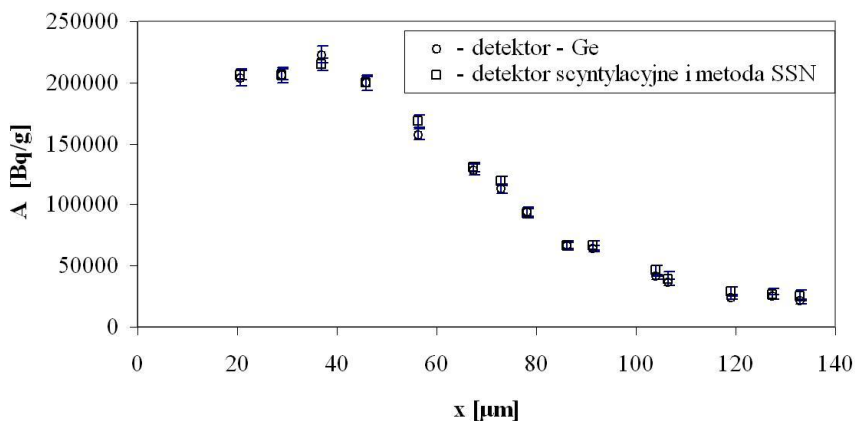
Stosowane w badaniach próbki stali miały kształt walców o średnicy 14 mm i grubości 1 mm. Na jedną z powierzchni walca, w sposób elektrolityczny, nanoszone były izotopy Cr-51, Mn-54 i Fe-59. Tak przygotowana próbka wygrzewana była przez kilka dni w temperaturze 1173 K. Po procesie wygrzewania, również w sposób elektrolityczny, ściągane były warstwy o grubości około 3 μm . Dokładny opis procesu przeprowadzania takich badań można znaleźć w pracy (Dudała i in. 2005).

Dla każdej warstwy wykonywany był pomiar widma promieniowania γ z użyciem klasycznego detektora scyntylicyjnego i analizatora wielokanałowego. Przykładowe widma dla trzech różnych warstw przedstawiono na rysunku 3.13. Dla tak uzyskanych widm do wyznaczenia natężenia promieniowania pochodzącego od poszczególnych izotopów zastosowano metodę sztucznych sieci neuronowych. Metoda postępowania była identyczna jak przedstawiona w rozdziale 3.3.3. Zastosowano jednowarstwową sieć liniową z trzema neuronami. Pierwszy neuron wyznaczał natężenie promieniowania pochodzącego od Cr-51, drugi od Mn-54 a trzeci od Fe-59.



Rys. 3.13. Przykłady widm promieniowania γ dla różnych warstw

Tak jak dla wszystkich analiz spektrometrycznych, tak i w tym przypadku, istotna jest stabilna praca układu spektrometrycznego. Wielokrotne wielogodzinne badania stabilności pracy układu nie wykazały przesunięć widm powyżej kilku kanałów. Przesunięcia takie zaobserwowano w przypadku pomiaru próbek o wielokrotnie różniące się aktywności. Przy skrajnie różnych aktywnościach przesunięcia te dla fotopiku 835 keV dochodziły do 5 kanałów. Aby zmniejszyć błąd stąd wynikający, opracowano program skalujący te widma. Program ten na podstawie precyzyjnego wyznaczenia położenia maksimum fotopiku o energii 320 i 835 keV wyliczał liniowe współczynniki przeskalowania widma.

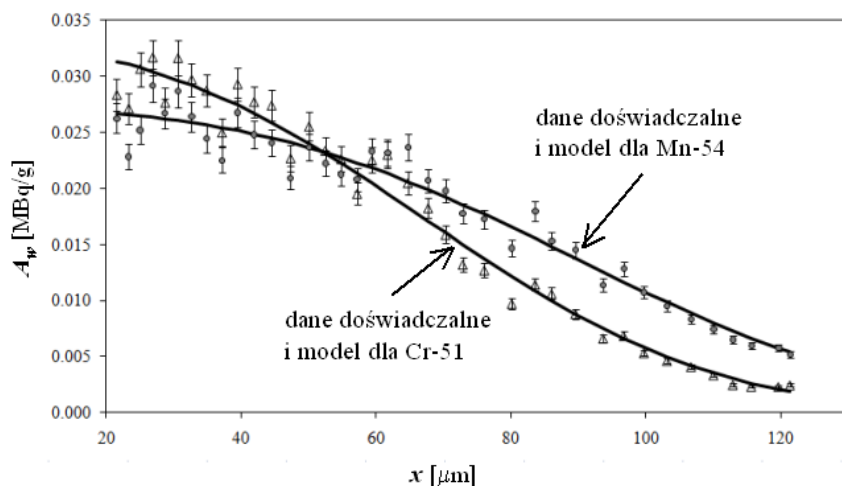


Rys. 3.14. Aktywności Cr-51 uzyskane z detektora germanowego i scyntylacyjnego w połączeniu z metodą sieci neuronowych

Aby wyznaczyć aktywności poszczególnych izotopów, w badanych próbkach, wykonane zostały pomiary kalibracyjne. Dla próbek kalibracyjnych o znanych aktywnościach poszczególnych izotopów dokonano pomiaru ich widm. Z widm tych wyliczono natężenia promieniowania pochodzącego od poszczególnych izotopów i stosunki tych natężeń do aktywności stanowiły współczynniki kalibracyjne. Wszystkie pomiary wykonywane były w identycznej geometrii pomiarowej. Ze względu na geometrię próbek i energię fotonów γ , samoabsorbacja była praktycznie całkowicie do zaniedbania. W celu doświadczalnego

potwierdzenia dokładności zastosowanej metody, dla kilkunastu próbek wykonano dodatkowe pomiary za pomocą półprzewodnikowego detektora germanowego o zdolności rozdzielczej rzędu 1%. Uzyskane oboma metodami wyniki przedstawiono na rysunku 3.14. Na rysunku tym na osi poziomej jest odległość w głąb próbki stali, a na pionowej aktywność izotopu Cr-51.

Przedstawione na tym rysunku niepewności wynikają ze statystycznego charakteru rozpadu izotopów promieniotwórczych. Dane te pokazują, że zastosowanie detektora scyntylicyjnego w połączeniu z metodą sztucznych sieci neuronowych dają, w granicach błędu statystycznego, identyczne wyniki jak te otrzymane z detektora germanowego.



Rys. 3.15. Przykład końcowych wyników pomiarów z dopasowanym dyfuzyjnym modelem transportu

Do uzyskanych rozkładów stężenia izotopów w głąb próbki stali został dopasowany analityczny dyfuzyjny model transportu opisanym równaniem

$$A_w(x) = A_w(0) \exp\left(\frac{-x^2}{4D t}\right) \quad (3.8)$$

gdzie:

x – odległość w głąb próbki,

$A_w(x)$ – aktywność izotopu na głębokości x ,

D – współczynnik dyfuzji,

t – czas wygrzewania próbki.

Pozwoliło to wyznaczyć współczynniki dyfuzji wybranych metali w badanych stalach. Przykłady takich dopasowań przedstawiono na rysunku 3.15.

Celem tego rozdziału było przedstawienie możliwości zastosowania sztucznych sieci neuronowych w pomiarach znacznikowych z równoczesnym zastosowaniem kilku izotopów promieniotwórczych. Dokładne informacje dotyczące badań dyfuzji metali w stalach są przedstawione w publikacji (Dudała i in. 2005).

5. Podsumowanie

Fizyka przepływu płynów i mieszanin wielofazowych obejmuje szeroki obszar zagadnień istotnych dla nauk technicznych i przyrodniczych. W ostatnich dekadach osiągnięto znaczny postęp w zakresie modelowania zjawisk turbulentnego przepływu płynów i mieszanin wielofazowych. Od strony matematycznej modele te stanowią bardziej lub mniej złożony układ równań różniczkowych uzupełnionych zależnościami algebraicznymi. W większości przypadków modelowania przepływów wymagają wykonywania obliczeń numerycznych prowadzonych na komputerach o odpowiednio dużej mocy obliczeniowej. Obecny stan techniki w tym zakresie pozwala na praktyczne szerokie stosowanie tych modeli. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na rozwój tej dziedziny nauki jest duże zainteresowanie rozwiązaniami zagadnień przepływu w takich dziedzinach jak przemysł lotniczy, samochodowy, energetyczny oraz eksploatacja i przeróbka surowców naturalnych. Zarówno naukowe jak i komercyjne zapotrzebowania spowodowały opracowanie i wdrożenie wielu pakietów obliczeniowych dedykowanych modelowaniu i symulacjom procesów przepływu. Tak jak w każdej dziedzinie nauki, tak i w tym przypadku, wyniki uzyskane na drodze symulacji komputerowych stają się w pełni wiarygodne po ich doświadczalnej weryfikacji. Jedną z metod doświadczalnego badania układów przepływowych są pomiary z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych. Omówione w pracy podstawy teoretyczne modelowania układów przepływowych mają bardzo szerokie zastosowanie.

Zamierzeniem autora niniejszej pracy było przedstawienie aktualnego stanu modelowań komputerowych układów przepływowych prowadzonych w powiązaniu z badaniami znacznikowymi. Zamieszczone w pracy wyniki dotyczą badań przepływów w procesach wzbogacania rud miedzi. Można je uznać za przykład efektywności metodyki badawczej opartej na powiązaniu modelowań matematycznych z eksperymentami wykonywanymi przy użyciu znaczników promieniotwórczych.

Modele przepływu o uśrednionych parametrach są ugruntowane historycznie i powszechnie stosowane głównie ze względu na prostotę ich użycia. Modele te, w ogólnym przypadku, nie dają możliwości wniknięcia

w istotę zjawisk zachodzących w badanym układzie. Ich rola sprowadza się do opisu odpowiedzi układu na określone wymuszenie, co w wielu przypadkach jest wystarczające z punktu widzenia założonego celu badań (np. sterowanie danym procesem). Wartości parametrów tych modeli można wyznaczyć tylko na drodze doświadczalnej, tak jak dla wszelkich modeli fenomenologicznych. W praktyce, badając dany układ przepływowy, najpierw wykonuje się pomiary znacznikowe. Następnie dokonuje się analizy kształtu doświadczalnej funkcji rozkładu czasu przebywania, a na jej podstawie podejmuje się próby możliwie jak najpełniejszego jakościowego opisu charakteru przepływu w układzie. W oparciu o rezultaty tych analiz projektowany jest model, który jest dopasowywany do danych doświadczalnych. Dopasowanie to pozwala na weryfikację zaproponowanego modelu i wyznaczenie wartości jego parametrów, które charakteryzują badany układ przepływowy.

W pracy omówiono teoretyczne zagadnienia dotyczące modeli o uśrednionych parametrach oraz przedstawiono przykłady badania i modelowania przepływowych układów procesów wzbogacania rudy miedzi. Przykłady te zostały tak dobrane, aby pokazać zróżnicowany charakter przepływów i konieczność zastosowania modeli o różnym stopniu złożoności. Pierwszy przykład dotyczył wyników badań mających na celu porównanie pracy dwóch różnych typów maszyn flotacyjnych. W tym przypadku wystarczyła prosta analiza parametryczna do oceny różnic przepływu w tych maszynach. W drugim przypadku badany był układ młyna kulowego i klasyfikatora zwojowego. Dla tego układu analiza doświadczalnych funkcji rozkładu czasu przebywania wymagała zastosowania stosunkowo złożonego modelu komorowego do opisu przepływu z zawrotem materiału pomiędzy wylewem klasyfikatora a młynem. W trzecim przypadku, dotyczącym procesów odwadniania koncentratu rudy miedzi, najbardziej złożony model należało zastosować do opisu przepływu w filtrze.

Modele złożone opisane są przez bardziej lub mniej rozbudowany układ równań różniczkowych, który w wielu przypadkach nie posiada rozwiązania analitycznego. W takich przypadkach należy szukać rozwiązania poprzez transformatę Laplace'a lub metody numeryczne. Metody te zostały przedstawione w pracy i podane zostały biblioteki oraz

pakiety programów pozwalających na takie obliczenia. Stosunkowo dokładnie został omówiony program DTS, jako dedykowany pakiet do modelowania przepływów w oparciu o funkcję rozkładu czasu przebywania.

Znacznie bardziej zaawansowanym sposobem modelowania układów przepływowych jest numeryczna mechanika płynów (CFD). Metoda ta oparta jest na podstawowych prawach dynamiki płynów oraz określonych modelach opisujących efekty wywołane turbulentnym charakterem przepływu. W przypadku mieszanin typu płyn-faza stała dodatkowo modelowane jest oddziaływanie cząstek fazy stałej z płynem. W pracy oprócz podstaw teoretycznych modelowania CFD pokazano praktyczne zastosowanie tej metody do symulacji pracy przemysłowego hydrocyklonu klasyfikującego. W literaturze prace na ten temat pojawiły się dopiero w ostatnich kilku latach. Dotychczasowe prace dotyczyły symulacji przepływu samej wody w hydrocyklonie lub wody i pojedynczych cząstek fazy stałej. W niniejszej pracy przedstawiono symulacje przepływu mieszaniny wody i cząstek fazy stałej o różnej granulacji. Pozwoliło to na wyznaczenie zarówno rozkładów pola prędkości jak i rozkładu stężenia objętościowego różnych frakcji granulometrycznych fazy stałej. Otrzymane wyniki dały pełny fizyczny obraz procesu przepływu i klasyfikacji cząstek fazy stałej w hydrocyklonie. W badaniach przetestowano różne modele opisujące zjawiska turbulencji. Istotne różnice, w wynikach symulacji przepływu mieszaniny w hydrocyklonie, wystąpiły pomiędzy zastosowaniem standardowego modelu k- ϵ a pozostałymi modelami. Otrzymane symulowane funkcje selekcji zostały porównane z danymi doświadczalnymi uzyskanymi z pomiarów znacznikowych. Porównanie to pokazało dobrą zgodność pomiędzy kształtem funkcji doświadczalnej a funkcjami symulowanymi. Pomiarы znacznikowe pozwalają uzyskać dane doświadczalne, które są bardzo ważne przy weryfikacji wyników symulacji przepływów metodą CFD. W przypadku hydrocyklonu badania znacznikowe przeprowadzone były dla różnych frakcji granulometrycznych fazy stałej. Do znakowania zastosowano ten sam izotop promieniotwórczy, co powodowało konieczność przeprowadzenia niezależnych pomiarów dla poszczególnych frakcji.

W badaniach znacznikowych przepływów wielofazowych korzystne jest równoczesne znakowanie kilku faz. Dotyczy to układów dla których wielokrotne odtworzenie identycznych warunków przepływu jest niemożliwe oraz układów wymagających długotrwałych badań znacznikowych. W pracy przedstawione jest autorskie rozwiązanie zastosowania sztucznych sieci neuronowych do prowadzenia badań z jednoczesnym użyciem wielu znaczników promieniotwórczych emitujących promieniowanie gamma. Dokładnie zostały omówione teoretyczne zagadnienia leżące u podstaw tej metody oraz przykład jej zastosowania w badaniach laboratoryjnych procesów dyfuzji w ciałach stałych. W badaniach terenowych z zastosowaniem znaczników promieniotwórczych stosuje się głównie sondy scyntylacyjne. Sondy te połączone są z systemem komputerowym, który sterują całym procesem zbierania i zapisu danych. Obecnie możliwe jest instalowanie, w takich sondach, analizatorów wielokanałowych i programów analizujących rejestrowane dane w czasie rzeczywistym. Stosując taki system, z zaprojektowaną siecią neuronową, możliwe jest prowadzenie pomiarów wieloznacznikowych z równoczesnym pomiarem natężenia promieniowania pochodzącego od wszystkich znaczników.

Literatura

- Andersen J.A., Rosenfeld E., 1998: *Neurocomputing. Foundation of Research*. Cambridge, Mass. The MIT Press.
- Axelsson G., Barry B.J., Berne P., Bjørnstad T., Cameron R. Charlton, S. Maggio G.E., Pang Z., Thereska J., Vitart X., 2004. *Radiotracer Application in Industry. A Guidebook*. Technical Reports Series no. 423. IAEA, Vienna.
- Baguley W., Easey J., Stegowski Z., Wiblin W., 1988: *Radiotracer Investigation of the Behaviour of Metal and Slag in a Zinc/Lead Blast Furnace and the Modelling of the Hearth Drainage*. 4-th Conference on Radioisotope Application and Radiation Processing in Industry, Leipzig, Proceedings Vol. II, 540 – 550.
- Bennett M.A., Williams R.A., 2004: *Monitoring the operation of an oil/water separator using impedance tomography*. Minerals Engineering 17, 605–614.
- Berne Ph., Bjornstad T., Brisset P., Charlton S., Chmielewski A., Genders S., Griffith J.M., Hills A., Jin J.H., Jung S.H., Khan I. H., Maggio G., Martins Moreira R., Pant H. J., Thereska J. Zhang P., 2008: *Radiotracer Residence Time Distribution Method for Industrial and Environmental Applications*. International Atomic Energy Agency IAEA-TCS-31, Vienna.
- Berne Ph., Bjornstad T., Brisset P., Chmielewski A., Farooq M., Furman L., Griffith J.M., Jentsch T., Leclerc J.P., Maggio G., Najurieta H., Palige J., Pant H. J., Pendharkar A.S., Thereska J., Thyn J., Viitanen P., Vitart X., Wheatley J., Zhang P., Zitny R. 2001: *Radiotracer technology as applied to industry*. International Atomic Energy Agency IAEA-TECDOC-1262 Vienna.
- Bhusarapu S., Al-Dahhan M., Dudukovic M.P. 2004: *Quantification of solids flow in a gas–solid riser: single radioactive particle tracking*. Chemical Engineering Science 59, 5381 – 5386.
- Brennan M.S., Narasimha M., Holtham P.N., 2007: *Multiphase modelling of hydrocyclones – prediction of cut-size*. Minerals Engineering, 20, 395–406.

- Charlton J.S., 1986. *Radioisotope techniques for problem solving in industrial process plants*. Leonard Hill, Glasgow and London.
- IAEA, 1990: *Guidebook on radioisotope tracers in industry*. Technical Reports Series No. 316, International Atomic Energy Agency, Vienna.
- Chiné B., Concha F., 2000: *Flow patterns in conical and cylindrical hydrocyclones*. Chemical Engineering Journal 80, 267–273.
- Chmielewski A.G., Leciejewicz J., Stachowica W., Urbanski P., and Walis L., 1988: *Application of radioisotope techniques and radiation technologies developed in Institute of Nuclear Chemistry and Technology*. Warsaw, Poland. 4-th Conference on Radioisotope Application and Radiation Processing in Industry, Leipzig, Proceedings Vol. I, 143.
- Chmielewski A.G., Owczarczyk A., Romanowski M., Urbański P., Stęgowski Z., Nowak K., Tańczyk R., Pachan M., Jabłoński R., 1997. *Zastosowanie technik jądrowych w Polsce*. Postępy techniki jądrowej, 40 (2), 7-16.
- Chmielewski A.G., Owczarczyk and A., Palige J., 1998: *Radiotracer investigations of industrial wastewater equalizer-clarifiers*. Nukleonika, 43(2), 185–194.
- Chmielewski A.G., Palige J., Dobrowolski A., Owczarczyk A., Rozen A., 2001: *Application of RTD and CFD for flue gas irradiation reactor investigation*. Recents Progres en Genie des Procedes, 15, 137-143.
- Cullivan J.C., Williams R.A., Dyakowski T., Cross C.R., 2004: *New understanding of a hydrocyclone flow field and separation mechanism from computational fluid dynamics*. Minerals Engineering 17, 651–660.
- Dai G.Q., Chen W.M., Li J.M., Chu L.Y., 1999: *Experimental study of solid-liquid two-phase flow in a hydrocyclone*. Chemical Engineering Journal, 74, 211-216.
- Danckverts P.V., 1953: *Continuous flow systems, Distribution of Residence Times*. Chemical Engineering Science, 2 (1) 1–13.
- Delgadillo J.A., Rajamani R.K., 2005: *A comparative study of three turbulence-closure models for the hydrocyclone problem*. International Journal of Mineral Processing, 77, 217–230.

- Dudała J., Gilewicz-Wolter J., Stęgowski Z., 2005: *Diffusion measurements in chromium-manganese steels by means of multiple radiotracer test*. Defect and Diffusion Forum, 237-240, 1199–1204.
- Dudała J., Gilewicz-Wolter J., Stęgowski Z., 2005: *Simultaneous measurement of Cr, Mn and Fe diffusion in chromium-manganese steels*. Nukleonika, 50 (2), 67–71.
- Dyakowski T., Jeanmer L.F.C., Jaworski K., 2000: *Applications of electrical tomography for gas-solids and liquid-solids flow – a revive*. Powder Technology, 112, 174-192.
- Dwari R.K., Biswas M.N., Meikap B.C., 2004: *Performance characteristics for particles of sand FCC and fly ash in a novel hydrocyclone*. Chemical Engineering Science, 59, 671 – 684.
- Dziunikowski B., 1998: *Zastosowania izotopów promieniotwórczych*. Część II. Wdawnictwa AGH, Kraków.
- England J. B., 1980. *Metody doświadczalne fizyki jądrowej*. PWN, Warszawa.
- Fisher M.J., Flack R.D., 2002: *Velocity distributions in a hydrocyclone separator*. Experiments in Fluids, 32, 302-312.
- FLUENT, 2000. *User's Guide*. Fluent Inc.
- Frachon M., Cilliers J.J., 1999: *A general model for hydrocyclone partition curves*. Chemical Engineering Journal, 73, 53-59.
- Furman L., Leclerc J. P., Stęgowski Z., 2005. *Tracer investigation of a packed column under variable flow*. Chemical Engineering Science, 60, 3043-3048.
- Furman L., Petryka L., Stęgowski Z., Wierzbicki A., 2003: *Data acquisition and processing in radiotracer experiments*. Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B, 211, 436-442.
- Furman L, Stęgowski Z. et al., 1987: *Radiometric surveying system for analysis and data recording*. Polish Engineering, 4, 33.
- Gardner R.P., Ely. J.R., 1967: *Radioisotope Measurement Applications in Engineering*, Reinhold Publishing Corporation, New York.
- Himmelblau D. M., Bischoff K.B., 1968: *Process Analysis and Simulation*. ed. J. Wiley & Sones, New York.
- Hinze J.O., 1975; *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Co., New York.

- Iller E., Thyn J., 1994. *Metody radioznacznikowe w praktyce przemysłowej*. WNT, Warszawa.
- Korbicz J., Obuchowicz A., Uciski D., 1994: *Sztuczne Sieci Neuronowe Podstawy i Zastosowania*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa.
- Kraipech W. Chen W., Parma F.J., Dyakowski T., 2002: *Modelling the fish-hook effect of the flow within hydrocyclones*. Int. J. Miner. Process, 66, 49–65.
- Kreft A., 1983: *Problemy modelowania matematycznego dyspersji hydrodynamicznej*. Zeszyty Naukowe AGH nr 958, Matematyka-Fizyka-Chemia, Zeszyt 61.
- Kreft A., Lenda A., Turek B., Zuber A., Czauderna K., 1974: *Determination of effective porosities by the two-well pulse method*. (w) *Isotope Techniques in Groundwater Hydrology* IAEA, Vienna, 295–312.
- Kreft A., Zuber A., 1978: *On the physical meaning of the dispersion equation and its solution for different boundary condition*. Chem. Eng. Sci. 43, 1471–1480.
- Lauder B. E., Reece G. J. and Rodi W., 1975: *Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure*. J. Fluid Mech., 68(3), 537-566.
- Lauder B. E., Spalding. D. B., 1972: *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London, England.
- Leclerc J.-P., Claudel S., Lintz H.G., Potier O., Antoine B., 2000: *Theoretical interpretation of residence time distribution measurements in industrial processes, oil and gas science and technology*. Revue de l'Institut Francais du Pe'trole, 55 (2), 1 – 12.
- Leclerc J.-P., Detrez C., Bernard A., Schweich D., 1995: *DTS: Logiciel d'aide à l'élaboration de modèles d'écoulement dans les réacteurs*, Revue de l'institut français du pétrole, 50, 5, 641-656.
- Levenspiel O., 1999: *Chemical Reaction Engineering*. 3rd ed. Wiley, New York.
- Lenda A., Zuber A., 1970: *Tracer dispersion in groundwater experiments*. (w) *Isotope Hydrology* IAEA, Vienna, 619–641.

- Mitsutani K., Grace J.R., J. Lim C., 2005: *Residence time distribution of particles in a continuous liquid–solid classifier*. Chemical Engineering Science, 60, 2703 – 2713.
- Mousavian S.M. Najafi A. F., 2009: *Numerical simulations of gas–liquid–solid flows in a hydrocyclone separator*. Arch. Appl. Mech., 79, 395–409.
- Nageswararao K., Wiseman D.M., Napier-Munn T.J., 2004: *Two empirical hydrocyclone models revisited*. Minerals Engineering, 17, 671–687.
- Narasimha M., Sripriya R., Banerjee P.K., 2005: *CFD modelling of hydrocyclone - prediction of cut size*. International Journal of Mineral Processing, 75, 53-68.
- Neuman von J., 1958: *The Computer and the Brain*. Yale Univ. Press, New Haven.
- Nguyen H.V., Vampbell J.M., Couchell G.P., Li S., Pullen D.J. Schier W.A. Seabury E.H., Tipnis S.V., 1996: *Programs in C for parameterizing measured 5'x 5' NaI gamma response function and unfolding of continuous gamma spectra*. Computer Physics Communications, 93, 303-321.
- Nowakowski A.F., Cullivan J.C., Williams R.A., Dyakowski T., 2004: *Application of CFD to modelling of the flow in hydrocyclones. Is this a realizable option or still a research challenge?*. Minerals Engineering, 17, 661–669.
- Olson T.J., Van Ommen R., 2004: *Optimizing hydrocyclone design using advanced CFD model*. Minerals Engineering, 17, 713–720.
- Owono A.P., 2010: *Multi-group approximation, scattering and calibration coefficients, uncertainty estimates and detection limits of a NaI(Tl)-based gamma spectrometry set-up for low-level activity analysis*. Journal of Environmental Radioactivity, 101, 692-699.
- Pareek V. K., Yap Z., Brungs M. P., Adesina A. A., 2001: *Particle residence time distribution (RTD) in three-phase annular bubble column reactor*. Chemical Engineering Science, 56, 6063–6071.
- Palige J. ; Dobrowolski A. ; Owczarczyk A. ; Chmielewski, A. G. ; Ptaszek, S. ; Fard, M. H. S., 2006: *Badania znacznikowe i CFD struktury przepływu ścieków w osadnikach prostokątnych dla różnych geometrii napływu i wypływu ścieków*. Inżynieria i Aparatura Chemiczna, 5s, 104—107.

- Petryka L., Furman L., Przewlocki K., Stegowski, Z., 1993: *Radioisotope investigation of copper ore dressing processes*. Nuclear Geophysics, 7 (2), 313– 322.
- Pope B. S., 2000: *Turbulent Flow*. Cambridge University Press.
- Przewlocki K., Furman L., Petryka L., Stegowski Z., Kamiński J., 1996: *Slip Velocity Measurements of Sand-Stone -Water Slurries in Vertical Pipes*. J. Hydrol. Hydromech., 44 (1), 3-11.
- Przewlocki K., Petryka L., Stegowski Z., 1990: *Radiotracer Identification of the Copper Ore Benefication Process*. Isotopenpraxis, 26 (9), 439-444.
- Schlaberg H.S., Frank Podd F.J.W., Hoyle B.S., 2000: *Ultrasound process tomography system for hydrocyclones*. Ultrasonics, 38, 813- 816.
- Schütz S., Gorbach G., Piesche M., 2009: *Modeling fluid behavior and droplet interactions during liquid–liquid separation in hydrocyclones*. Chemical Engineering Science, 64, 3935 - 3952
- Schuetz S., Mayer G., Bierdel M., Piesche M., 2004: *Investigations on the flow and separation behaviour of hydrocyclones using computational fluid dynamics*. Int. J. Miner. Process., 73, 229 - 237.
- Shih T.-H., Liou W. W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J., 1995: *A New $k-\varepsilon$ Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows - Model Development and Validation*. Computers Fluids, 24(3), 227-238.
- Slack M.D., Del Porte S., Engelman M.S., 2004: *Designing automated computational fluid dynamics modeling tools for hydrocyclone design*. Minerals Engineering, 17, 705–711.
- Stegowski Z., 1993: *Accuracy of Residence Time Distribution Function Parameters*. Nuclear Geophysics, 7, 2, 335-341.
- Stęgowski Z. 2001: *Badania Procesów Wzbogacania Rud Miedzi*. Raport PTN-5, 13-22.
- Stęgowski Z., 2002: *Spektrometryczna analiza widma z detektora scyntylacyjnego z zastosowaniem sztucznych sieci neuronowych*. Raporty IChTJ, seria A nr 2/2002, Tom 2, 484-490, Warszawa.
- Stęgowski Z., 2004: *Sztuczne sieci neuronowe*. Kernel, AGH, nr 1, 16–19.

- Stęgowski Z., Dagadu C. P. K., Furman L., Akaho E. H. K., Danso K.A., Mumuni I.I., Adu P.S, Amoah C., 2010: *Determination of flow patterns in industrial gold leaching tank by radiotracer residence time distribution measurement*. Nukleonika, 55(3), 339–344.
- Stęgowski Z., Furman L., 2004: *Radioisotope tracer investigation and modeling of copper concentrate dewatering process*. International Journal of Mineral Processing, 73, 37- 43.
- Stęgowski Z., Leclerc J-P., 2002: *Determination of the solid separation and residence time distributions in an industrial hydrocyclone using radioisotope tracer experiments*. International Journal of Mineral Processing, 66 , 67-77.
- Stęgowski Z., Nowak E., 2007: *Radiotracer experiments and CFD simulation for industrial hydrocyclone performance*. Nukleonika, 52(3), 115–123.
- Stęgowski Z., Nowak E., Furman L., 2004: *Combining CFD simulation with experimental RTD function for hydrocyclone separator studies. Integration of tracing with computational fluid dynamics for industrial process investigation*. International Atomic Energy Agency, Vienna, IAEA-TECDOC-1412, 161–178.
- Szymkiewicz R., 2000: *Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach i kanałach*. PWN, Warszawa.
- Tadeusiewicz R., 1993: *Sieci neuronowe*. Akademicka Oficyna Wydawnicza RM, Warszawa.
- Taylor W.K., 1960: *Computers and the nervous system*. Models and analogues in biology. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Thyn J., Zitny R., Kluson J. and Cechak T., 2000: *Analysis and Diagnostics of Industrial Processes by Radiotracers and Radioisotope Sealed Sources*. Vydavatelstvi CVUT, Prague.
- Van de Veldena M., Baeyensa J., Smoldersb K., 2007: *Solids mixing in the riser of a circulating fluidized bed*. Chemical Engineering Science 62, 2139-2153
- Villiermaux J., 1995: *Génie de la réaction chimique*. 2^oed. Tec & Doc - Lavoisier, Paris.

- Volkovitsky P., Yen J., Cumberland L., 2007: *Uncertainty in relative energy resolution measurements*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 580, 1497–1501
- Wilkes J.O., 1999: *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*. Prentice Hall PTR, New Jersey.
- Wang Z.B., Chu L.Y., Chen W.M., Wang S.G., 2008: *Experimental investigation of the motion trajectory of solid particles inside the hydrocyclone by a Lagrange method*. Chemical Engineering Journal 138, 1–9.
- Wang B., Yu A.B., 2008: *Numerical study of the gas–liquid–solid flow in hydrocyclones with different configuration of vortex finder*. Chemical Engineering Journal, 135, 33–42.
- Weller K.R., Spencer, S.J., Gao M.-W., Liu Y., 2000: *Tracer studies and Breakage testing in pilot-scale stirred mills*. Minerals Engineering 13(4), 429-458.
- Yakhot V. and Orszag S. A., 1986: *Renormalization Group Analysis of Turbulence: I. Basic Theory*. Journal of Scientific Computing, 1(1), 1-51.
- Yakhot A., Orszag S. A, Yakhot V., and Israeli M., 1989: *Renormalization Group Formulation of Large-Eddy Simulation*. Journal of Scientific Computing, 4,139-158.
- Yamazaki K., Tonouchi S., Hashimoto T., 2002: *Factors associated with the variations in environmental gamma-ray spectra in Kashiwazaki Kariwa area*. Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, 252(2), 359–366.
- Yang I.H., Shin C.B, Kim T.-H., Kim S., 2004: *A three-dimensional simulation of a hydrocyclone for the sludge separation in water purifying plants and comparison with experimental data*. Minerals Engineering, 17, 637–641.
- Yianatos J., Bergh L., Condori P., Aguilera J., 2001: *Hydrodynamic and metallurgical characterization of industrial flotation banks for control purposes*. Minerals Engineering 14(9), 1033-1046.
- Yianatos J., Bergh L., Díaz F., Rodríguez J., 2005: *Mixing characteristics of industrial flotation equipment*. Chemical Engineering Science, 60, 2273 – 2282.
- Zheng Ch., Bennet G. D. 2002: *Applied Contaminant Transport Modeling*. John Wiley Sons, New York.

- Zuber A., Grabczak J., Kolonko M., 1979: *Environmental and artificial tracers for investigating leakages into salt mines*. Proc.Symp.Isotope Hydrology IAEA Vienna, Vol.I, 45-62
- Zuber A., Róžański K., Ciężkowski W., 2007: *Metody znacznikowe w badaniach hydrogeologicznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Zuber A., 1970: *A method for determining leakage velocities through the bottom of reservoirs*. (w) Isotope Hydrology IAEA, Vienna, 761–771.
- Zuber A., 1974: *Theoretical possibilities of the two-well pulse method*. (w) Isotope Techniques in Groundwater Hydrology IAEA, Vienna, 277–294.

