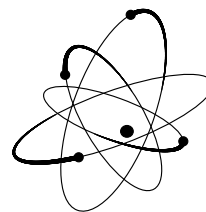




Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica w Krakowie



Wydział Fizyki i Informatyki  
Stosowanej

---

---

## Praca magisterska

Grzegorz Ciaptacz

kierunek studiów: fizyka techniczna

specjalność: fizyka komputerowa

# Symulacja i analiza wyników procesu przepływu mieszaniny ciecz — faza stała

Opiekun: dr inż. Zdzisław Stegowski

Kraków, czerwiec 2006

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Grzegorza Ciaptacza,  
studenta V roku studiów kierunku fizyka techniczna, specjalności fizyka  
komputerowa**

Temat pracy magisterskiej: **Symulacja i analiza wyników procesu przepływu  
mieszanej cieczi — faza stała**

Opiekun pracy: dr inż. Zdzisław Stęgowski

Recenzent pracy: dr inż. Jarosław Nęcki

Miejsce praktyki dyplomowej: WFiIS AGH, Kraków

**Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej**

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
  - zapoznanie się z ideą separacji cząstek w cyklonie,
  - zapoznanie się z oprogramowaniem CFD Fluent oraz Gambit,
  - dyskusja i analiza danych,
  - sporządzenie sprawozdania z praktyki.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Analiza wyników obliczeń numerycznych, ich omówienie i zatwierdzenie przez opiekuna.
7. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie: 30 czerwca 2006

.....  
(podpis kierownika zakładu)

.....  
(podpis opiekuna)

**Merytoryczna ocena pracy przez opiekuna:**

Końcowa ocena pracy przez opiekuna: .....

Data: .....

Podpis: .....

**Merytoryczna ocena pracy przez recenzenta:**

Końcowa ocena pracy przez recenzenta: .....

Data: .....

Podpis: .....

Obowiązująca skala ocen: 6.0 – celująca, 5.0 – bardzo dobra, 4.5 – ponad dobra, 4.0 – dobra, 3.5 – ponad dostateczny, 3.0 – dostateczna,  
2.0 - niedostateczna

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Oprogramowanie</b>	<b>7</b>
2.1	Gambit . . . . .	7
2.2	Fluent . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modelowanie dynamiki płynów</b>	<b>14</b>
3.1	Najważniejsze równania hydrodynamiki . . . . .	14
3.2	Modelowanie turbulencji . . . . .	16
3.2.1	Opis Reynoldsa . . . . .	16
3.2.2	Model $k - \epsilon$ . . . . .	17
3.2.3	Równania transportu w modelu $k - \epsilon$ . . . . .	18
3.2.4	Równanie energii w modelu $k - \epsilon$ . . . . .	19
3.3	Określanie warunków brzegowych . . . . .	19
3.3.1	Wlot z określoną prędkością — <i>Velocity inlet</i> . . . . .	19
3.3.2	Wypływ — <i>Outflow</i> . . . . .	20
3.3.3	Wlot z określonym ciśnieniem — <i>Pressure inlet</i> . . . . .	21
3.3.4	Wylot z określonym ciśnieniem — <i>Pressure outlet</i> . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Modelowanie przepływów wielofazowych</b>	<b>22</b>
4.1	Model mieszaniny . . . . .	22
4.1.1	Równania ciągłości, pędu i energii . . . . .	22
4.1.2	Prędkość względna i prędkość dryfu . . . . .	24
4.1.3	Wyznaczanie frakcji objętościowej . . . . .	25
4.2	Metoda śledzenia cząstek . . . . .	25
4.2.1	Błądzenie przypadkowe . . . . .	26
4.2.2	Ruchy Brownowskie . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Analizowany układ – cyklon</b>	<b>27</b>
5.1	Zasada działania . . . . .	28
5.2	Budowa cyklonu . . . . .	28
5.3	Efektywność rozdziału . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Analiza wyników</b>	<b>31</b>
6.1	Parametry analizowanego układu . . . . .	31
6.2	Wyniki uzyskane metodą mieszaniny . . . . .	32
6.3	Wyniki uzyskane metodą śledzenia cząstek . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Podsumowanie i wnioski</b>	<b>45</b>

# 1 Wstęp

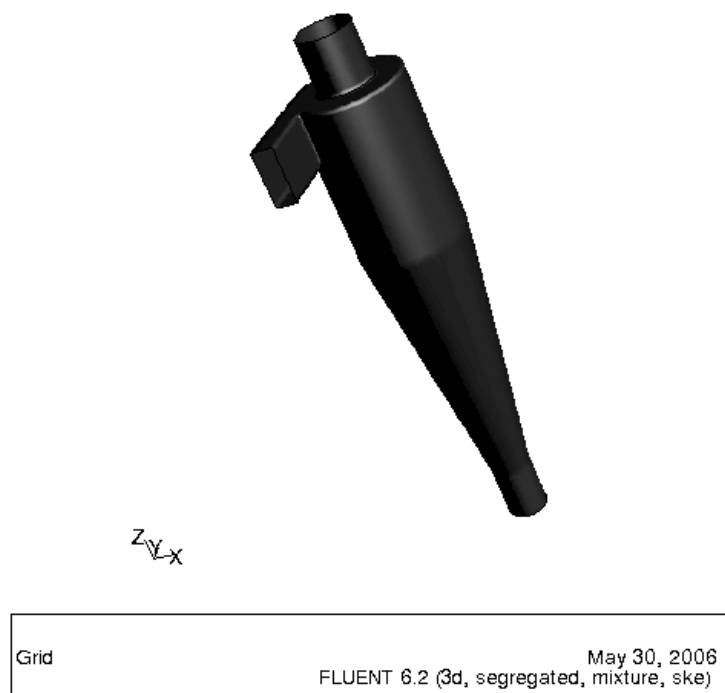
Od czasów starożytnych ciecze wzbudzały zainteresowanie ludzi. Fascynowała ich woda i jej przepływy w rzekach, morza i oceany, ruchy powietrza w atmosferze, wiatry i kształtowanie pogody.

Jako pierwszy wnioski dotyczące hydrostatyki formułował grecki filozof Archimedes. Już wtedy duży nacisk kładziono na zagadnienia związane z przepływami, ważne przy konstrukcji akweduktów i kanałów. Wkład i osiągnięcia w tym zakresie mieli starożytni Rzymianie. W czasach renesansu zainteresowanie zjawiskami towarzyszącymi przepływowi wody wzrosło. Pojawiło się w szkicach Leonarda Da Vinci. Isaac Newton starał się opisać i przewidzieć ruch płynu stosując podstawowe zasady dynamiki.

Pojęcie hydrodynamiki jako osobnej dziedziny pojawiło się w dziele Daniela Bernoulliego, *Hydrodynamika*, wydanym w 1738 roku. Duży wkład w formułowanie równań hydrodynamiki miał Leonard Euler, który zaproponował opis zachowania pędu i masy. Efekty związane z lepkością do równań dodali w późniejszym czasie Claude Navier i George Stokes. Te prace dały początek dalszemu rozwojowi hydrodynamiki jaki nastąpił w XIX i XX wieku.

W niniejszej pracy zajmuję się zastosowaniem dostępnych narzędzi numerycznych do rozwiązywania problemów hydrodynamiki.

Analizie został poddany przepływ i proces separacji, cząstek fazy stałej ze strumienia gazu, zachodzący w *cyklonie*.



Rysunek 1: Cyklon — obraz wygenerowany za pomocą programu Fluent

*Cyklon* jest urządzeniem, znajdującym szerokie zastosowanie, jako stosunkowo porosty w konstrukcji i eksploatacji separator cząstek. Powszechnie stosowany jest do usuwania pyłów z gazów spalinowych w elektrowniach i ciepłowniach. Stosuje się wiele wariantów konstrukcji, których testowanie oraz sporządzenie charakterystyki jest trudne, ze względu na zróżnicowane warunki pracy. Zachowanie układu może zależeć od wielu czynników, takich jak temperatura gazu, ciśnienie, prędkość przepływu, jego wydatek, oraz koncentracja i granulacja fazy stałej. W praktyce rzadko wykonuje się pomiary określające najwłaściwszy dla danego zastosowania wariant. Ze względu na trudne do odtworzenia, podczas testów laboratoryjnych, rozmiary oraz parametry pracy układu, znaczenie symulacji komputerowych może być bardzo duże.

Opis zjawisk towarzyszących przepływowi płynów oraz mieszanin wielofazowych jest bardzo skomplikowany. Są one przybliżane za pomocą różnych modeli, formułujących równania na podstawie rozważań teoretycznych, bądź też modeli empirycznych lub pół-empirycznych, w których część zależności wprowadzana jest na podstawie wyników przeprowadzonych doświadczeń. Większość modeli wymaga rozwiązania skomplikowanych równań, często metody analityczne są w ich przypadku niewystarczające. Zazwyczaj konieczne jest zdyskretyzowanie równań, oraz rozwiązanie ich metodami numerycznymi. Zajmuje się tym dziedzina nazwana CFD — *Computational Fluid Dynamics* — czyli *Numeryczna Dynamika płynów*.

W ramach tej pracy zostały wykonane obliczenia, przy pomocy jednego z najpopularniejszych komercyjnych programów CFD — Fluent. Obliczenia realizowane były na komputerach dużej mocy obliczeniowej w *ACK Cyfronet*.

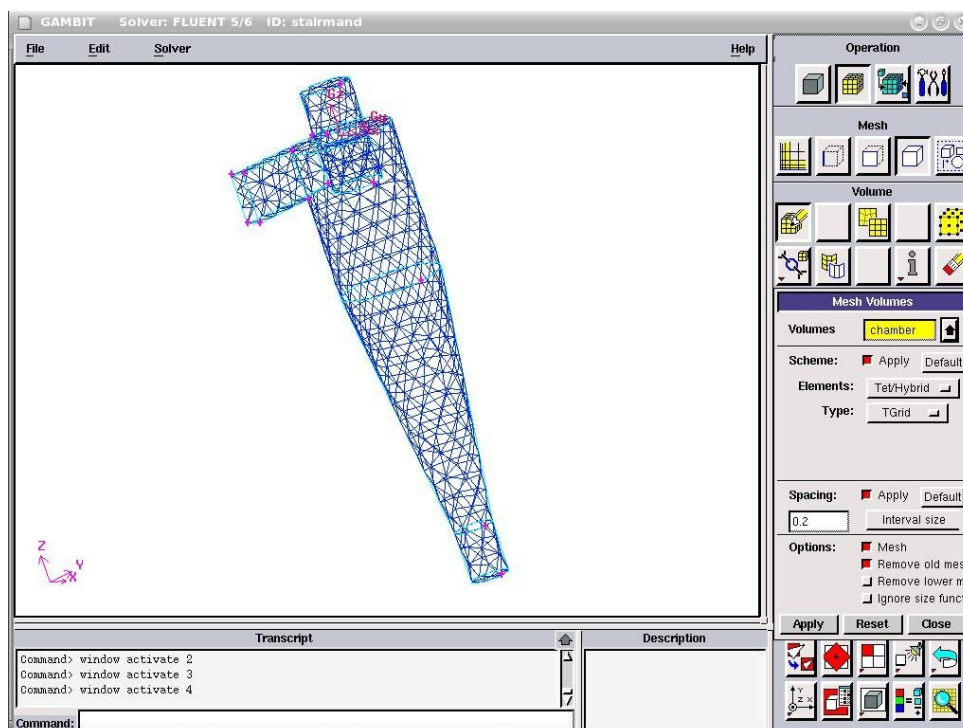
## 2 Oprogramowanie

CFD jest to szybko rozwijająca się dziedzina techniki, pozwalająca na modelowanie wielorakich przepływów, cieczy, gazów czy mieszanin. Numeryczne obliczenia dynamiki płynów stają się coraz bardziej powszechne. Dzieje się tak głównie za sprawą bardzo dużych możliwości tej techniki. Natomiast czynnikiem umożliwiającym spopularyzowanie takich obliczeń jest dostępność komputerów dysponujących wystarczającą mocą obliczeniową. Chodzi tu zarówno o dostępność komputerów dużej mocy obliczeniowej, jak i możliwości komputerów klasy PC.

Zaawansowane obliczenia wymagają stosowania odpowiedniego oprogramowania. Wiodącym dostawcą takiego oprogramowania jest firma FLUENT, producent programów CFD: Fluent, Gambit.

### 2.1 Gambit

Przed przystąpieniem do obliczeń, które z wykorzystaniem metody elementów skończonych realizowałem za pomocą programu Fluent, konieczne jest przygotowanie siatki dyskretyzacji, na której zostaną one wykonane. Oznacza to zdefiniowanie geometrii układu, podział przestrzeni na elementy objętości, podział powierzchni oraz wyznaczenie wierzchołków. Do przygotowania siatki do obliczeń posłużyłem się programem Gambit.



Rysunek 2: Obraz z programu Gambit, z widoczną wygenerowaną siatką dla analizowanego w pracy układu

Tworzenie modelu do dalszych obliczeń, przy użyciu programu Gambit, można podzielić na następujące etapy:

- Wprowadzanie geometrii.

Geometrię układ buduje się metodami typowymi dla aplikacji CAD, korzystając z graficznego interfejsu użytkownika (GUI). Dokładny wybór sposobu tworzenia geometrii jest indywidualny dla użytkownika i powinien być uzależniony od specyfiki układu. Bryły można wprowadzać wybierając z *menu* programu gotowy kształt (prostokąt, kula, walec, stożek), lub wypełniając przestrzeń ograniczoną przez wskazane, utworzone wcześniej, powierzchnie. Bardziej skomplikowane bryły obrotowe można uzyskać poprzez obrót wskazanej powierzchni o wybrany kąt (z takiej możliwości skorzystałem przy tworzeniu układu analizowanego w tej pracy). Pomędzy utworzonymi bryłami można realizować operacje logiczne:

- OR — sumowanie,
- AND — część wspólna,
- XOR — suma bez części wspólnej.

W przypadku powierzchni także można skorzystać z podstawowych figur, lub określić krawędzie tworzonej figury. Krawędzie oraz punkty mogą być wprowadzane bezpośrednio poprzez podanie ich współrzędnych.

- Tworzenie siatki dyskretyzacji.

Dysponując wprowadzoną geometrią, należy utworzyć siatkę, na której zostaną wykonane obliczenia. Obszar zostaje podzielony na komórki (*cells*), powierzchnie (*faces*), zdefiniowane zostają wierzchołki (*nodes*). Gambit umożliwia określenie różnych rodzajów siatki, tak aby obliczenia mogły być wykonywane dla zróżnicowanych geometrii. Można generować siatkę zaczynając od podziału krawędzi, następnie określając siatkę na ścianach, a na tej podstawie generując siatkę wewnątrz objętości. Gambit zawiera algorytmy pozwalające na utworzenie siatki przestrzennej dla całego układu.

- Określanie własności elementów układu.

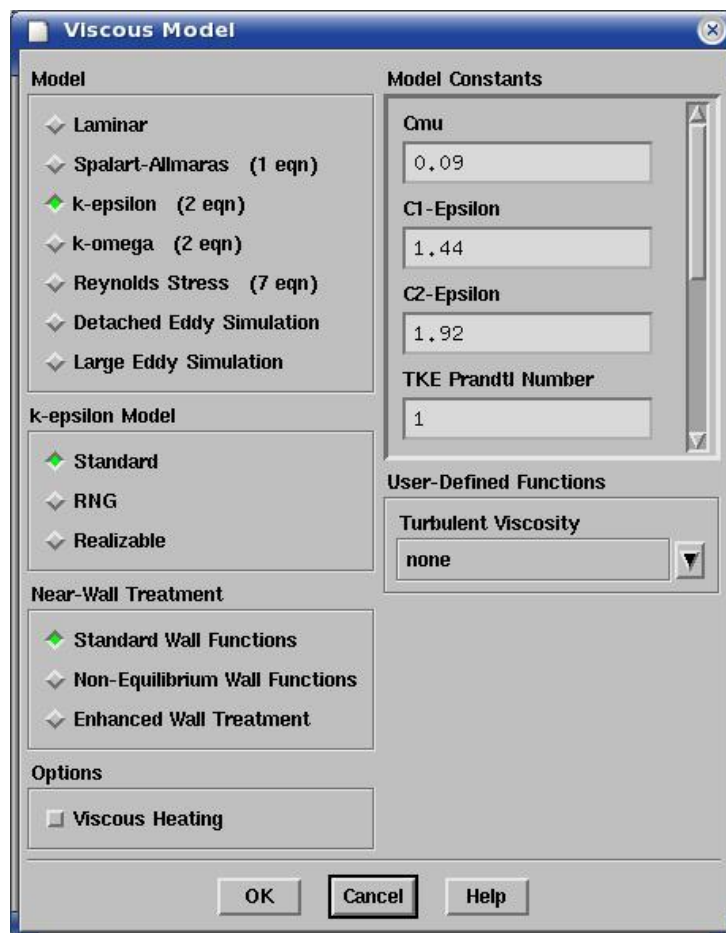
Ostatnią czynnością, którą można wykonać za pomocą programu Gambit jest wstępne zdefiniowanie elementów układu, takich jak ściany, obszary płynu, brzegi (w tym wloty i wyloty). Wprowadzona informacja będzie pomocna przy przygotowaniu modelu za pomocą programu Fluent.



## 2.2 Fluent

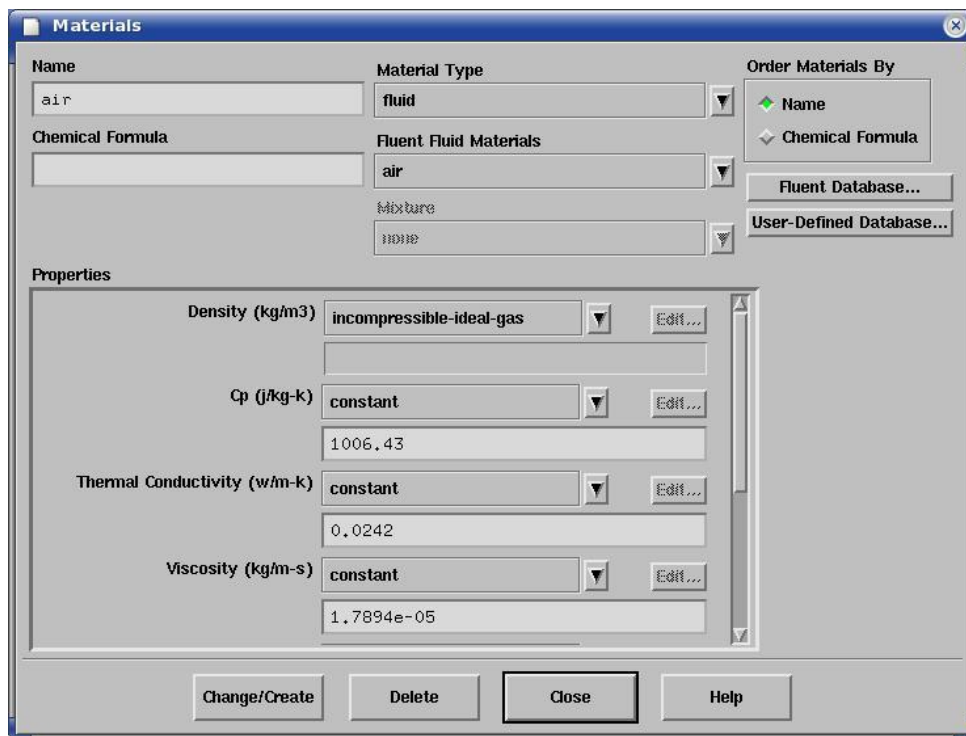
Właściwe obliczenia wykonałem przy użyciu programu Fluent. Po wczytaniu geometrii układu, przygotowanej w programie Gambit, należy zdefiniować pozostałe wielkości i parametry konieczne do dalszych obliczeń.

Pierwszym etapem jest wybór modeli zastosowanych w obliczeniach. Obejmuje on określenie przybliżeń wykorzystanych przy modelowaniu lepkości oraz wynikających z niej turbulencji, a także sposobu opisu przepływów wielofazowych. Należy również wskazać, czy równanie energii ma być rozwiązywane.

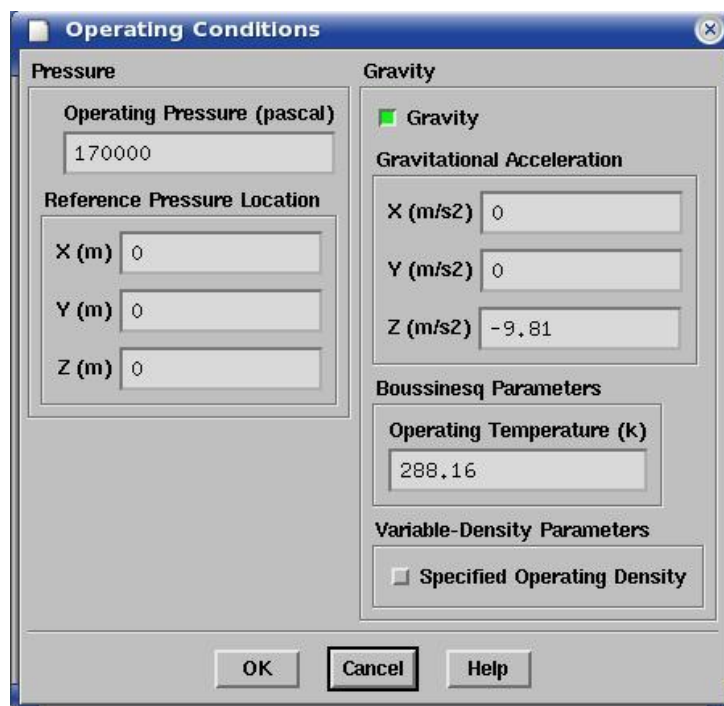


Rysunek 3: Wybór modelu opisującego zjawiska związane z lepkością i turbulencje — panel programu Fluent

Aby przepływ mógł być modelowany potrzebna jest informacja o parametrach substancji biorących w nim udział. Dotyczy to gazu lub cieczy, oraz substancji stałej gdy analizowany jest przepływ wielofazowy. Podczas wyboru substancji można określić indywidualnie poszczególne parametry lub sposób ich wyznaczania (na przykład gęstość może być określona jako stała albo wyliczona z wybranego równania stanu). Wielkości charakteryzujące substancję można wprowadzić ręcznie lub skorzystać z dostępnej, obszernej bazy materiałów, zawierającej parametry takie jak gęstość, ciepło właściwe, przewodność cieplna, lepkość.

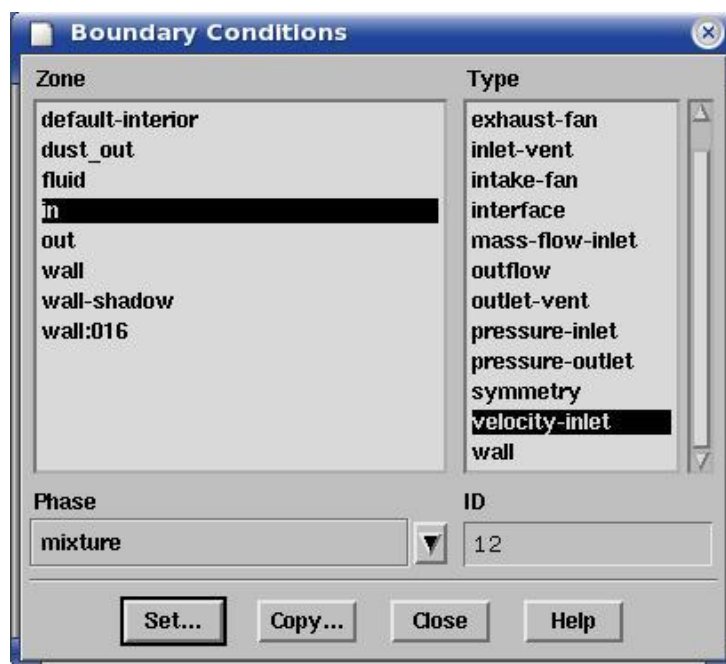


Rysunek 4: Wybór substancji ciekłej — panel programu Fluent



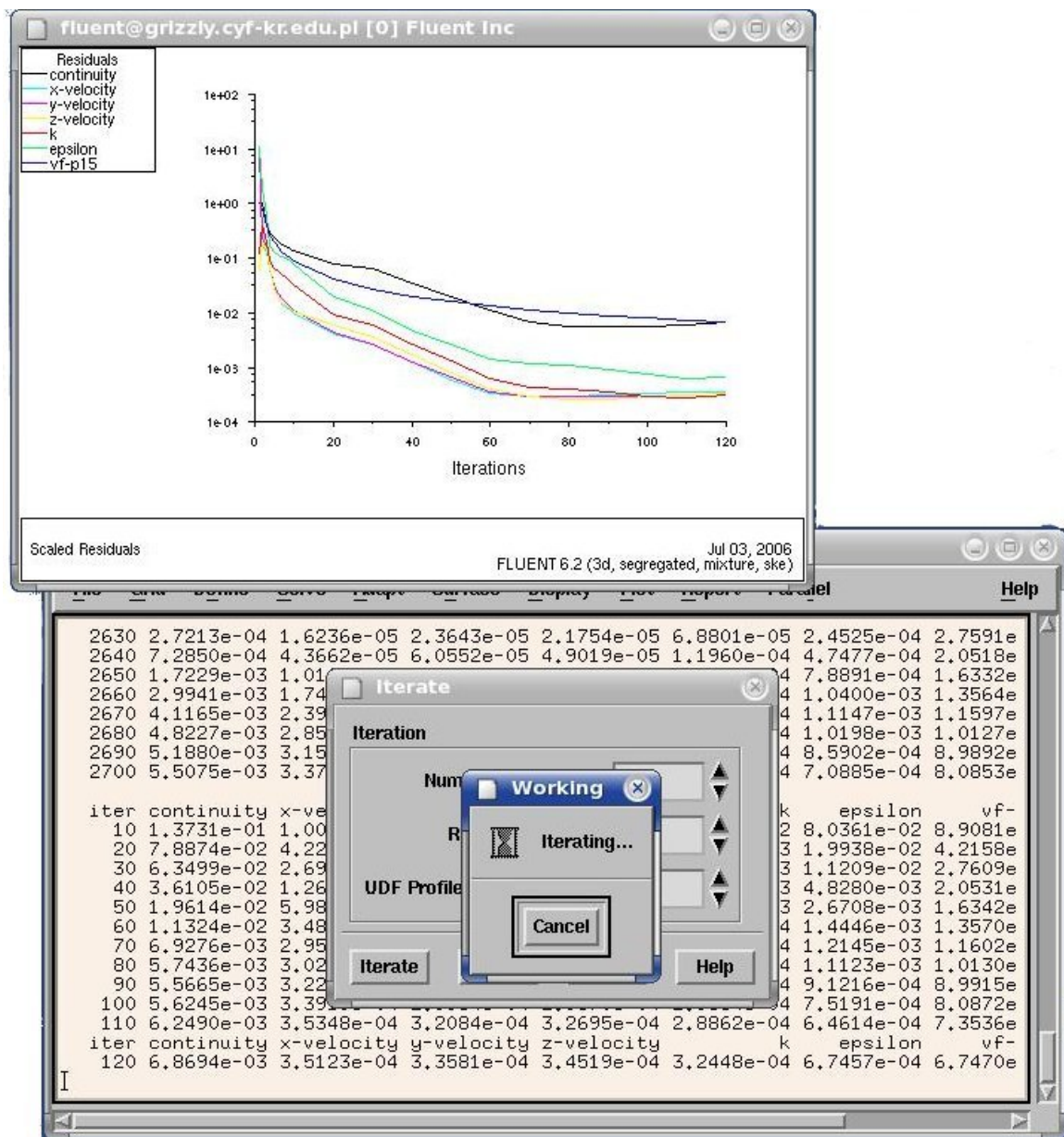
Rysunek 5: Określanie warunków symulacji — panel programu Fluent

Należy także określić warunki zewnętrzne w jakich odbywa się przepływ. Odpowiedni panel umożliwia podanie ciśnienia oraz punktu, w którym jest ono określone, temperatury oraz grawitacji (poprzez podanie składowych wektora przyspieszenia grawitacyjnego).



Rysunek 6: Określanie warunków brzegowych — panel programu Fluent

Każda powierzchnia ograniczająca obszar przepływu wymaga określenia sposobu, w jaki ma być traktowana podczas obliczeń. W przypadku ścian należy określić czy wymagane jest zerowanie prędkości płynu przy powierzchni lub pojawienie się naprężeń ścinających. Można określać także parametry termiczne ścian. W przypadku wlotów oraz wylotów jest dostępnych bardzo wiele *rodzai brzegów*. Każdy z nich pozwala na określenie wybranych parametrów przepływu, różnią się one sposobem wyznaczania pozostałych wielkości. Wlot może być zdefiniowany poprzez ciśnienie, prędkość płynu, lub wydatek przepływu. Wypływ można określić wskazując ilość substancji, która opuści układ przez daną powierzchnię, lub podając ciśnienie. Wybór rodzaju brzegu zależy od fizycznych warunków jakim ma on odpowiadać, wielkości charakteryzujących przepływ, które są określone oraz zastosowanych modeli i przybliżeń. Sposoby określania warunków brzegowych, które mogą znaleźć zastosowanie w analizowanym przeze mnie przypadku, opisałem w rozdziale 3.3.



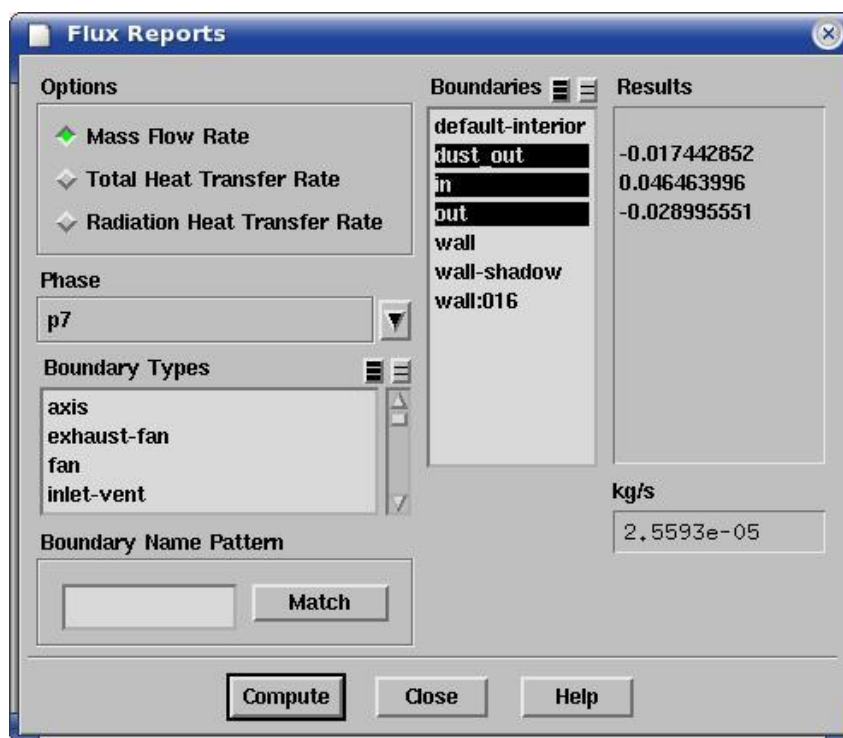
Rysunek 7: Fluent — ekran podczas obliczeń realizowanych w trybie interaktywnym

Podstawowym elementem symulacji są właściwe obliczenia. Podczas realizacji obliczeń w trybie interaktywnym można na bieżąco kontrolować na wykresie stopień w jakim rozwiązanie osiągnęło stan ustalony. W razie gdyby wystąpiły oscylacje rozwiązania, będą one także widoczne na wykresie. Obraz ekranu podczas obliczeń przedstawiłem na rysunku 7.

Przeprowadzona symulacja prowadzi do wyznaczenia przestrzennych rozkładów wielkości opisujących przepływ (wektorowe pole prędkości, pole gęstości, koncentracje faz w przypadku przepływów wielofazowych, parametry opisujące turbulencje). Jednak dla dalszej analizy wyników, konieczne jest ich przetworzenie. Fluent umożliwia obróbkę wyników obliczeń na wiele sposobów, między innymi:

- całkowanie po wybranych powierzchniach lub objętościach,

- wyznaczanie strumieni (odpowiedni panel jest przedstawiony na rysunku 8),
- rysowanie wykresów, histogramów,
- przedstawianie rozkładów wielkości, na określonych powierzchniach, w postaci konturów lub wektorów.



Rysunek 8: Wyznaczanie strumieni — panel programu Fluent

## 3 Modelowanie dynamiki płynów

### 3.1 Najważniejsze równania hydrodynamiki

W tym rozdziale przedstawiam krótko podstawowe równania hydrodynamiki, opisujące zachowanie płynów. Płyn składający się z wielu pojedynczych cząstek, traktowany jest w hydrodynamice jako *continuum*, czyli coś ciągłego. Dzięki temu możliwe jest określanie ciągłych pól skalarnych i wektorowych parametrów określających przepływ, oraz ich pochodnych przestrzennych.

Stosując zapis tensorowy, kartezjańskie współrzędne przestrzenne oznaczyłem jako  $x_i$ . Takimi samymi indeksami oznaczam składowe wielkości wektorowych. W ten sposób:

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z, \quad (1)$$

Dla wielkości wektorowych:

$$\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \equiv (u_x, u_y, u_z) \quad (2)$$

Przy zapisie stosuję operator *nabla*:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Pozwala on na zapisywanie równań w bardziej przejrzystej postaci. Podstawowe oznaczenia:

- prędkość płynu —  $\vec{u}$ ,
- gęstość —  $\rho$ ,
- czas —  $t$ .

Pierwszym równaniem jest *równanie ciągłości*.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = S_m \quad (3)$$

Równanie (3) jest ogólną postacią zasady zachowania masy i jest słuszne zarówno dla przepływów nieściśliwych, jak i ściśliwych. Wyraz  $S_m$  po prawej stronie odpowiada za źródła, czyli masę danej fazy ciągłej, która zostaje dodana do układu. Może się to odbywać na przykład w procesie przemiany z fazy dyskretnej. W analizowanym układzie nie występują źródła ( $S_m = 0$ ), poszukujemy rozwiązań w postaci przepływów ustalonych (średnie wartości parametrów opisujących przepływ nie zmieniają się w czasie), a zatem równanie ciągłości można zapisać:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4)$$

Ponadto, gdy ciecz jest nieściśliwa ( $\rho = const$ ):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (5)$$

Równanie ciągłości (3), zapisałem w notacji tensorowej, stosując konwencję sumowania Einsteina. Oznacza to, że powtarzające się wskaźniki podlegają sumowaniu.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = S_m \quad (6)$$

Konwencja sumowania oznacza, że równanie powyższe wygląda następująco:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3) = S_m \quad (7)$$

Podstawowym równaniem ruchu cieczy jest równanie Navier – Stokesa.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{g} \quad (8)$$

Poniżej zapisałem równanie w notacji tensorowej. Równaniu wektorowemu odpowiada układ trzech równań skalarnych dla różnych  $i$ , powtarzające się wskaźniki  $k$  oraz  $j$  oznaczają sumowanie.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Lewa strona równania (8) opisuje zmianę gęstości pędu i jest zapisana w postaci tzw. *pochodnej śledczej* prędkości po czasie. Uwzględnia ona zmianę prędkości elementu objętości cieczy zachodzącą w czasie, ale związaną także z przemieszczaniem w przestrzeni. Zmiana prędkości w czasie  $dt$  może być zapisana:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} dt = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} dx_3 \quad (10)$$

Po podzieleniu równania obustronnie przez  $dt$  uzyskujemy pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} u_3 = \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \end{aligned} \quad (11)$$

Prawa strona równania (8) opisuje siły działające na jednostkę objętości cieczy, w tym przypadku są to:

- Gradient ciśnienia —  $\nabla p$ .

- Naprężenia styczne wynikające z sił lepkości działających na element objętości cieczy, składowe tensora naprężeń są określone następująco:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & \text{dla } i \neq j \\ \mu \left( 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \mu' \nabla \cdot \vec{u} & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:

- $\mu$  jest *pierwszym współczynnikiem lepkości*, opisującym lepkość przy ścinaniu. Wyraża on stosunek naprężenia stycznego do szybkości ścinania.
- $\mu'$  to *drugi współczynnik lepkości*, który odpowiada za efekty związane ze ściśliwością. W przypadku cieczy nieściśliwej, przyjmuje się  $\mu' = 0$ , ze względu na fakt, iż dodatkowy składnik w elementach diagonalnych nie pojawia się (zachodzi równość (5)).

- Siła grawitacji —  $\rho \vec{g}$ .

## 3.2 Modelowanie turbulencji

Przepływy turbulentne charakteryzują się zmianami pola prędkości. Zaburzenia pola prędkości powodują zaburzenia rozkładu pędu, energii itd. Efekty związane z turbulencją pomimo niewielkiego zasięgu, mają dużą częstotliwość i są bardzo wymagające pod względem obliczeniowym. Dlatego też ich bezpośrednie wyznaczanie w obliczeniach jest praktycznie niemożliwe. Zamiast dokładnych równań, rozwiązuje się równania uśrednione po czasie lub zespole, czyli pozbawione informacji o turbulencjach (zjawiskach małej skali) oraz dodatkowe charakteryzujące te zjawiska. Zmodyfikowany w ten sposób model jest zdecydowanie łatwiejszy w rozwiązaniu numerycznym, zawiera jednak dodatkowe, nieznanne zmienne. Istnieje wiele sposobów określenia zjawisk związanych z turbulencjami. Poszczególne modele, różnią się zarówno parametrami jakimi są opisane, ich ilością, a także ilością i złożonością równań, które będą musiały być rozwiązane.

### 3.2.1 Opis Reynoldsa

Turbulencje w przepływach występują w trzech wymiarach. Poszczególne składowe prędkości można wyrazić następująco:

$$u_1 = \bar{u}_1 + u'_1 \quad (13)$$

$$u_2 = \bar{u}_2 + u'_2 \quad (14)$$

$$u_3 = \bar{u}_3 + u'_3 \quad (15)$$

Średnie składowe prędkości w każdym kierunku  $\bar{u}_i$ , w dalszym opisie oznaczam jako  $U_i$ . Składowe  $u'_i$  określają fluktuacje wokół wartości średnich.



Przy takim określeniu prędkości ( $u_i = U_i + u'_i$ ), średnia prędkość w czasie może być zapisana jako:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_i dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_i dt \quad (16)$$

$T$  określa przedział czasu w jakim dokonane jest uśrednianie,  $t_0$  to początkowy czas. W przypadku ustalonego przepływu i dostatecznie długiego czasu  $T$ , średnia wartość prędkości powinna być stała i nie zależna od  $t_0$ . Wtedy korzystając z faktu, iż  $U_i$  określa prędkość średnią ( $U_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_i dt$ ), można zapisać równanie (16) w postaci:

$$U_i = U_i + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_i dt \quad (17)$$

Jest to spełnione gdy  $u'_i$  jest fluktuacją wokół wartości średniej, która po uśrednieniu się zeruje:

$$\overline{u'_i} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_i dt = 0 \quad (18)$$

Zastosowanie takiego określenia prędkości pozwala na wykonanie przybliżeń, polegających na rozwiązaniu równań dla wartości średnich  $U_i$  oraz dodatkowych równań, opisujących efekty związane z turbulencjami, które są scharakteryzowane za pomocą fluktuacji prędkości  $u'_i$ .

### 3.2.2 Model $k - \epsilon$

Najprostszymi kompletnymi modelami opisującymi turbulencje są modele opierające się na rozwiązaniu układu dwóch równań. Standardowy model  $k - \epsilon$  od jego wprowadzenia stał się bardzo popularny i znalazł szerokie zastosowanie w obliczeniach. Jest to pół-empiryczny model, opierający się na rozważaniach fenomenologicznych i doświadczeniu. Późniejsza analiza modelu pozwoliła na wprowadzenie uzupełnień zwiększających skuteczność modelu. Model ten jest słuszny dla przepływów całkowicie turbulentnych.

Wprowadzona w modelu wartość energii kinetycznej turbulencji jest zdefiniowana następująco:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \overline{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2} \quad (19)$$

Wielkość  $k$  opisuje energię kinetyczną związaną z fluktuacjami prędkości. Wartość  $\epsilon$  opisuje rozpraszanie energii kinetycznej turbulencji, na skutek działania sił lepkości przy ścinaniu:

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (20)$$

Po rozpisaniu sumy równanie można zapisać w postaci:

$$\epsilon = 2\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right)^2} \quad (21)$$

W równaniu występuje *współczynnik lepkości kinematycznej*:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (22)$$

### 3.2.3 Równania transportu w modelu $k - \epsilon$

Energia kinetyczna turbulencji  $k$  oraz jej rozpraszanie  $\epsilon$  są wyznaczone na podstawie równań transportu tych wielkości: [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (23)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (24)$$

$G_k$  odpowiada za generację turbulencji w wyniku występujących gradientów średniej prędkości

$$G_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (25)$$

$G_b$  odpowiada za generację turbulencji na skutek działania siły grawitacji. Dla gazu opisanego równaniem stanu gazu doskonałego:

$$G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (26)$$

$Y_M$  uwzględnia efekty związane ze ściśliwością gazu.

$$Y_M = 2\rho \epsilon M_t^2 \quad (27)$$

Turbulentna liczba Macha:

$$M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} \quad (28)$$

gdzie  $a \equiv \sqrt{\gamma RT}$  jest prędkością dźwięku.

$C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$  oraz  $C_{3\epsilon}$ , są stałymi.  $\sigma_k$  i  $\sigma_\epsilon$  to liczby Prandtla dla wielkości  $k$  i  $\epsilon$ . Wielkości  $S_k$ ,  $S_\epsilon$  są dodatkowymi, zdefiniowanymi źródłami.

Lepkość turbulentna  $\mu_t$  jest wyznaczana z zależności, uwzględniającej wielkości  $k$  oraz  $\epsilon$ :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (29)$$

gdzie  $C_\mu$  jest stałą.

Wartości występujących w modelu stałych są dobrane na podstawie doświadczeń:

$$\begin{aligned} C_{1\epsilon} &= 1.44 \\ C_{2\epsilon} &= 1.92 \\ C_\mu &= 0.09 \\ \sigma_k &= 1.0 \\ \sigma_\epsilon &= 1.3 \end{aligned}$$

### 3.2.4 Równanie energii w modelu $k - \epsilon$

Równanie energii zastosowane w modelu  $k - \epsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i(\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (30)$$

Efektywna przewodność cieplna jest wyznaczana ze wzoru:

$$k_{\text{eff}} = k + \frac{c_p \mu_t}{\text{Pr}_t} \quad (31)$$

gdzie  $k$  jest przewodnością cieplną, wartość turbulენტnej liczby Prandtla to  $\text{Pr}_t = 0.85$

Liczba Prandtla jest jedną z liczb podobieństwa, wyrażającą stosunek momentu dyfuzyjnego do dyfuzji na drodze termicznej. Może być ona definiowana jako:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\lambda} \quad (32)$$

gdzie:

- $c_p$  — ciepło właściwe,
- $\mu$  — współczynnik lepkości dynamicznej,
- $k$  — współczynnik przewodnictwa ciepła,
- $\nu$  — współczynnik lepkości kinematycznej,
- $\lambda$  — współczynnik termodyfuzji.

Mała wartość liczby Prandtla oznacza, że transport ciepła na drodze dyfuzji dominuje nad konwekcyjnym. [10]

## 3.3 Określanie warunków brzegowych

### 3.3.1 Wlot z określoną prędkością — *Velocity inlet*

W przypadku tak definiowanego brzegu można określić parametry takie jak:

- wartość prędkości,
- kierunek i zwrot prędkości,
- temperatura (używana przy rozwiązywaniu równania energii),
- parametry opisujące turbulencje,
- koncentracja poszczególnych faz w strumieniu wpływającego płynu.

Program wykorzystuje wielkości określone w warunkach brzegowych do wyznaczenia masy przepływającej przez powierzchnię, strumieni pędu i energii, oraz składu analizowanego medium. Strumień masy przez powierzchnię (oznaczoną jako  $\Sigma$ ) jest wyznaczany na podstawie wzoru:

$$\dot{m} = \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (33)$$

Jak widać, o masie jaka dostaje się do układu decyduje prostopadła do powierzchni składowa wektora prędkości.

### 3.3.2 Wypływ — *Outflow*

Warunki brzegowe na powierzchniach określonych jako *Outflow* spełniają dwa założenia:

- zerowe strumienie dyfuzyjne dla wszystkich wielkości opisujących przepływ,
- korekcja całkowitej masy przepływającej przez powierzchnię.

Konsekwencją założenia zerowej dyfuzji jest ekstrapolacja wielkości opisujących przepływ na powierzchni, na podstawie wartości w obszarze przylegającym do brzegu. W ten sposób występowanie powierzchni nie ma wpływu na warunki przepływu wewnątrz obszaru obliczeniowego. Wartości na brzegu są wyznaczane z fizycznym założeniem, że profil przepływu jest ustalony, tzn. wielkości parametrów przepływu nie zmieniają się w kierunku przepływu. Warto zaznaczyć, że gradienty wielkości poprzeczne do kierunku przepływu mogą być niezerowe.

Oprogramowanie Fluent umożliwia zastosowanie wielu powierzchni z warunkami określonymi jako *Outflow*. W takim przypadku można kontrolować stosunek wielkości strumieni przez poszczególne powierzchnie. Służy do tego ustalana w programie wielkość *Flow Rate Weighting*. Wielkość *Flow Rate Weighting* jest współczynnikiem wagowym, określającym udział danej powierzchni w sumarycznym wypływie:

$$f_i = \frac{FRW_i}{\sum_j FRW_j} \quad (34)$$

W przypadku jednego brzegu o tak określonych warunkach nie ma potrzeby zmiany wymienionego parametru. Gdy — jak w przypadku przeze mnie analizowanym — w układzie występują dwie takie powierzchnie, jeżeli wagi pozostaną niezmiennione, to przepływ zostanie rozdzielony po równo do obu powierzchni. Aby zapewnić inne proporcje należało zmienić wartości wag.

Warunek ten współpracuje z wejściem typu *Velocity Inlet*. Nie jest natomiast możliwe połączenie go z warunkami brzegowymi określającymi ciśnienie.

### 3.3.3 Wlot z określonym ciśnieniem — *Pressure inlet*

Pole ciśnień określone w programie  $p'_s$ , tak jak wielkości podawane przy definiowaniu warunków brzegowych zawierają człon odpowiadający za ciśnienie hydrostatyczne  $\rho_0 g x$ . Ciśnienie jest definiowane następująco:

$$p'_s = p_s - \rho_0 g x \quad (35)$$

lub

$$\frac{\partial p'_s}{\partial x} = \frac{\partial p_s}{\partial x} - \rho g \quad (36)$$

W ten sposób ciśnienie hydrostatyczne może być uwzględnione przy wyznaczaniu siły, poprzez składnik  $(\rho - \rho_0)g$ , a pominięte, gdy gęstość jest stała. W związku z tym wielkości ciśnienia określane przez użytkownika oraz wyliczane i podawane przez program nie uwzględniają ciśnienia hydrostatycznego.

W przypadku przepływu nieściśliwego prędkość jest związana ciśnieniem, poprzez prawo Bernoulliego, relacją:

$$p_0 = p_s + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}| \quad (37)$$

Dla przepływów ściśliwych zależność jest następująca:

$$p_0 = p_s \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (38)$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} \quad (39)$$

### 3.3.4 Wylot z określonym ciśnieniem — *Pressure outlet*

W przypadku brzegu tego typu możliwe jest określenie parametrów, takich jak:

- ciśnienie statyczne,
- warunki przepływu wstecznego (gdy określone ciśnienie powoduje, że przepływ zmienia kierunek i ciecz nie opuszcza układu lecz wpływa do środka),
- parametry dotyczące fazy stałej,
- całkowita masa wypływająca przez powierzchnię (ta opcja nie działa przy przepływach wielofazowych).

Ciśnienie płynu na powierzchni jest określone jako podana wielkość ciśnienia statycznego  $p_s$ . Wszystkie pozostałe parametry przepływu są ekstrapolowane na podstawie przepływu wewnątrz obszaru obliczeniowego.

## 4 Modelowanie przepływów wielofazowych

### 4.1 Model mieszaniny

Najważniejsze cechy modelu mieszaniny:

- poszczególne fazy mogą się przenikać, frakcje objętościowe  $\alpha_p$  i  $\alpha_q$  mogą przyjmować wartości od 0 do 1, w zależności od objętości jaką zajmują w mieszaninie fazy  $p$  i  $q$ ,
- fazy mogą poruszać się z różnymi prędkościami, stosuje się tu koncepcję prędkości dryfu.

Model mieszaniny wykorzystuje *przybliżenie pojedynczego płynu*. Oznacza to, że w przypadku zastosowania tego modelu, dla mieszaniny jako całości rozwiązywane są równania:

- ciągłości,
- pędu,
- energii.

Natomiast dla poszczególnych faz tworzących mieszaninę:

- rozwiązywane jest równanie opisujące frakcje objętościowe,
- wyznaczone są prędkości względne.

#### 4.1.1 Równania ciągłości, pędu i energii

Rozwiązywane równania, aby odzwierciedlały zachowanie mieszaniny, muszą zostać odpowiednio zmodyfikowane. Poniżej przedstawiam formuły używane w modelu mieszaniny,  $n$  oznacza liczbę faz, wielkości z indeksem  $m$  są wartościami opisującymi mieszaninę. Równanie ciągłości dla mieszaniny przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m) = 0 \quad (40)$$

gdzie  $\vec{v}_m$  jest wypadkową prędkością mieszaniny,  $\rho_m$  jest gęstością mieszaniny.

$$\vec{v}_m = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \vec{v}_k}{\rho_m} \quad (41)$$

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (42)$$

Równanie pędu dla mieszaniny można uzyskać przez sumowanie równań dla poszczególnych faz. W modelu stosowanym w programie Fluent, rozwiązywane jest równanie w postaci [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{v}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \vec{v}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_m + \rho_m \vec{g} + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \vec{v}_{\text{dr},k} \vec{v}_{\text{dr},k} \right) \quad (43)$$

Składnik  $\nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \vec{v}_m)$  w tym przypadku oznacza działanie operatora na macierz:

$$(\rho_m \vec{v}_m \vec{v}_m) \equiv \rho_m \begin{pmatrix} (v_m)_1(v_m)_1 & (v_m)_1(v_m)_2 & (v_m)_1(v_m)_3 \\ (v_m)_2(v_m)_1 & (v_m)_2(v_m)_2 & (v_m)_2(v_m)_3 \\ (v_m)_3(v_m)_1 & (v_m)_3(v_m)_2 & (v_m)_3(v_m)_3 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Równanie (43) zapisałem poniżej w notacji tensorowej:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m (v_m)_i) + \frac{\partial}{\partial x_s}(\rho_m (v_m)_i (v_m)_s) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_m)_{ij}}{\partial x_j} + \rho_m g_i + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k (v_{\text{dr},k})_i (v_{\text{dr},k})_l \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (45)$$

Tensor naprężeń stycznych jest w tym przypadku określony następująco:

$$(\tau_m)_{ij} = \mu_m \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (46)$$

$\mu_m$  jest pierwszym współczynnikiem lepkości określonym dla mieszaniny:

$$\mu_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k \quad (47)$$

Porównując ten wzór ze wzorem (12), ze strony 16, można zauważyć, że w tym przypadku nie są uwzględniane efekty lepkości związane ze ściśliwością.

Prędkość dryfu cząstek fazy  $k$  jest określona jako:

$$\vec{v}_{\text{dr},k} = \vec{v}_k - \vec{v}_m \quad (48)$$

Lewa strona równania (43) po przekształceniu i uwzględnieniu związku opisanego równaniem ciągłości (40) przyjmuje postać taką jak lewa strona równania Navier – Stokesa (8), opisanego na stronie 15. Różnica pojawia się w prawej stronie równań w postaci składnika  $\frac{\partial}{\partial x_l} (\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k (v_{\text{dr},k})_i (v_{\text{dr},k})_l)$ , odpowiada on za zmianę pędu związaną z różnicami prędkości, a zatem pędu poszczególnych faz, pojawiających się na skutek różnicy prędkości danej fazy i prędkości mieszaniny.

Równanie energii dla modelu mieszaniny:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n (\alpha_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot \sum_{k=1}^n (\alpha_k \vec{v}_k (\rho_k E_k + p)) = \nabla \cdot (k_{\text{eff}} \nabla T) \quad (49)$$

gdzie efektywna przewodność cieplna  $k_{\text{eff}} = \sum \alpha_k (k_k + k_t)$ . Wartość  $E_k$  dla faz ściśliwych jest określona następująco:

$$E_k = h_k - \frac{p}{\rho_k} + \frac{v_k^2}{2} \quad (50)$$

natomiast dla nieściśliwych  $E_k = h_k$ , gdzie  $h_k$  jest entalpią swobodną fazy  $k$ .

### 4.1.2 Prędkość względna i prędkość dryfu

Prędkość względna fazy  $p$  względem fazy podstawowej  $q$  wyraża się wzorem:

$$\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p - \vec{v}_q \quad (51)$$

Fracja masowa każdej z faz jest definiowana następująco:

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} \quad (52)$$

Prędkość dryfu jest powiązana z prędkością względną, relacją:

$$\vec{v}_{\text{dr},p} = \vec{v}_{pq} - \sum_{k=1}^n c_k \vec{v}_{qk} \quad (53)$$

Prędkość względna wyznaczana jest przy założeniu, że lokalna równowaga między fazami ustala się w niewielkiej odległości. Formuła opisująca prędkość względną jest następująca:

$$\vec{v}_{pq} = \frac{\tau_p}{f_{\text{drag}}} \frac{(\rho_p - \rho_m)}{\rho_p} \vec{a} \quad (54)$$

gdzie  $\tau_p$  jest czasem relaksacji cząstek fazy  $p$ :

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_q} \quad (55)$$

gdzie  $d$  określa średnicę cząstek. Funkcja charakteryzująca siłę oporu jest następująca:

$$f_{\text{drag}} = \begin{cases} 1 + 0.15\Re^{0.687} & \Re \leq 1000 \\ 0.0183\Re & \Re > 1000 \end{cases} \quad (56)$$

Przyspieszenie  $\vec{a}$  jest wyznaczane jako:

$$\vec{a} = \vec{g} - \underbrace{(\vec{v}_m \cdot \nabla) \vec{v}_m - \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t}}_{-\frac{D\vec{v}_m}{Dt}} \quad (57)$$

Występująca we wzorze (56) wielkość  $\Re$  to liczba Reynoldsa. Jest to liczba podobieństwa, wyrażająca stosunek sił bezwładności do sił lepkości. Liczba Reynoldsa definiowana jest wzorem:

$$\Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad (58)$$

gdzie:

- $\rho$  — gęstość płynu,
- $v$  — prędkość płynu,
- $l$  — charakterystyczny wymiar liniowy (na przykład średnica rury),
- $\mu$  — współczynnik lepkości dynamicznej.

Wartość liczby Reynoldsa stanowi kryterium charakteryzujące przepływy laminarne i turbulentne. Dla wartości większych od wartości krytycznej przepływ staje się turbulentny. Wartość krytyczna liczby Reynoldsa  $\Re \approx 2000$ . [9]



### 4.1.3 Wyznaczanie frakcji objętościowej

Równanie wykorzystywane do wyznaczania frakcji objętościowej fazy  $p$ , przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_p \rho_p) + \nabla \cdot (\alpha_p \rho_p \vec{v}_m) = -\nabla \cdot (\alpha_p \rho_p \vec{v}_{dr,p}) \quad (59)$$

## 4.2 Metoda śledzenia cząstek

Innym sposobem podejścia do przepływów wielofazowych jest metoda śledzenia cząstek. Polega ona na wyznaczeniu przepływu substancji nośnej (płynu), a następnie zamodelowaniu toru cząstki umieszczonej w nim. Trajektoria cząstki wyznaczana jest na podstawie prędkości płynu, siły grawitacji, wyporu oraz innych zdefiniowanych przez zastosowane modele sił (oddziaływań)

$$\frac{du_p}{dt} = F_D(u - u_p) + \frac{g_x(\rho_p - \rho)}{\rho_p} + F_x \quad (60)$$

Odpowiednie wielkości występujące w równaniu:

- $u_p$  — prędkość cząstki
- $u$  — prędkość płynu
- $F_D$  — siła oporu
- $g_x$  — przyspieszenie grawitacyjne
- $\rho_p$  — gęstość cząstki
- $\rho$  — gęstość płynu
- $F_x$  — dodatkowe siły zdefiniowane przez model

Siła oporu wyznaczana jest ze wzoru:

$$F_D = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{C_D \Re}{24} \quad (61)$$

$C_D$  jest współczynnikiem oporu. Liczba Reynoldsa:

$$\Re \equiv \frac{\rho d_p |u_p - u|}{\mu} \quad (62)$$

### 4.2.1 Błądzenie przypadkowe

Metoda ta stanowi poprawkę do metody śledzenia cząstek, pozwalającą na wprowadzenie elementu stochastycznego do wyznaczonej trajektorii. Odbywa się to na etapie obliczania trajektorii. Prędkość płynu w danym punkcie zostaje zmodyfikowana o losową składową zgodnie ze wzorem:

$$u = \bar{u} + u'(t) \quad (63)$$

Uzupełnienie metody śledzenia cząstek, poprzez wprowadzenie błądzenia przypadkowego, często pozwala na poprawienie wyników. Jednak w wielu przypadkach stosowanie tej metody może owocować wynikami niefizycznymi. Dlatego też należy ją wprowadzać ostrożnie, kontrolując uzyskiwane wyniki.

### 4.2.2 Ruchy Brownowskie

Dla cząsteczek o rozmiarach rzędu mikrometra siły związane z ruchami Brownowskimi mogą odgrywać znaczącą rolę. Uwzględnienie tego wpływu odbywa się poprzez dodanie odpowiedniego składnika do równania ruchu (60). Wpływ ruchów Browna jest uwzględniany w postaci szumu białego o gęstości widma: [7]

$$S_{n,ij} = S_0 \delta_{ij} \quad (64)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest deltą Kroneckera, natomiast amplituda:

$$S_0 = \frac{216\nu k_B T}{\pi^2 \rho d_p^5 (\rho_p/\rho)^2 C_C} \quad (65)$$

W równaniu powyższym:

- $T$  jest temperaturą płynu,
- $\nu$  jest lepkością kinematyczną (określoną równaniem (22) na stronie 17),
- $k_B$  to stała Boltzmana.

Odbywa się to przez dodanie do równania ruchu (60) siły, której wartość zapisana jest następująco:

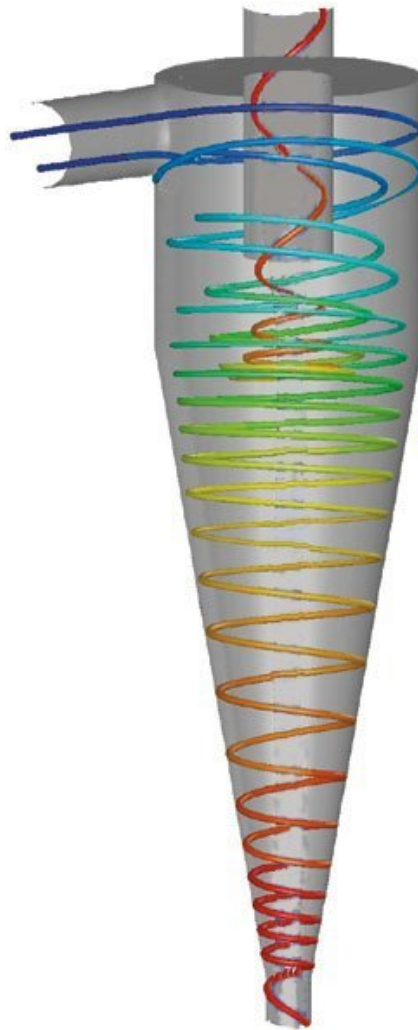
$$F_{Bi} = \zeta_i \sqrt{\frac{\pi S_0}{\Delta t}} \quad (66)$$

gdzie  $\zeta_i$  podlega rozkładowi normalnemu o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji.

## 5 Analizowany układ – cyklon

Cyklony znajdują szerokie zastosowanie jako separatory cząstek, do usuwania pyłu ze strumienia gazu. Cyklon jest stosunkowo prostym w konstrukcji i mało awaryjnym filtrem pozwalającym na usunięcie cząstek popiołu z gazów spalinowych.

Skuteczność działania, jak i specyficzne parametry pracy cyklonu silnie zależą od jego kształtu i wielkości. Prawidłowy dobór geometrii często odbywa się metodą doświadczalną. W takim przypadku należy przeprowadzić szereg pomiarów i na ich podstawie dobrać optymalną geometrię. Obliczenia numeryczne mogą wyraźnie obniżyć koszt i usprawnić proces doboru odpowiedniej konstrukcji cyklonu, w danym zastosowaniu.

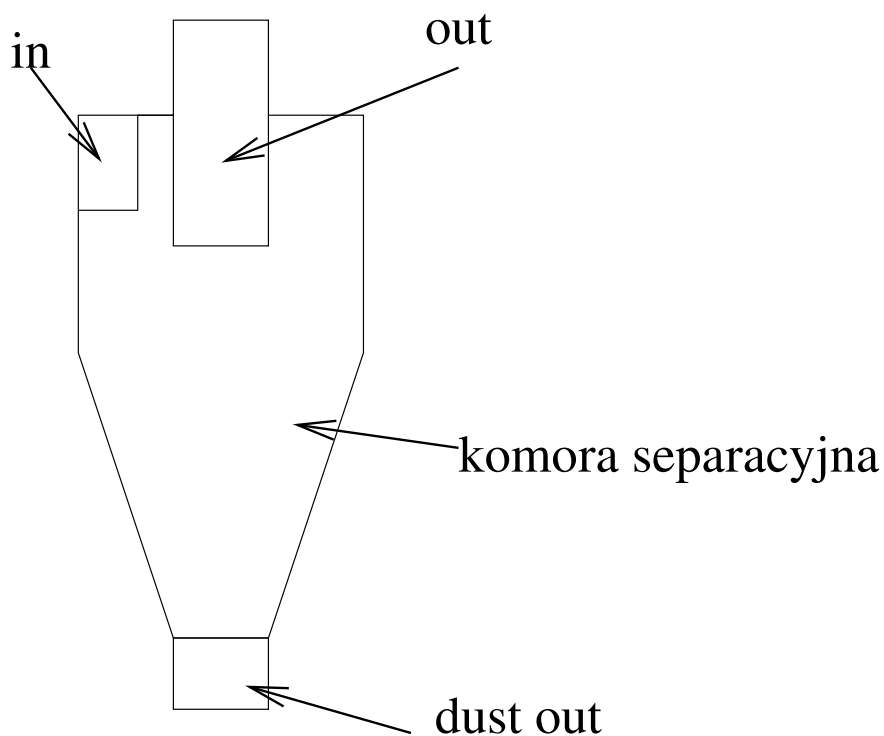


Rysunek 9: Przykładowe trajektorie cząstek fazy stałej w cyklonie

## 5.1 Zasada działania

Na rysunku 10 zaznaczone zostały obszary decydujące o działaniu cyklonu:

- *in* — wlot, przez który wprowadzany jest gaz z pyłem, jego kształt i umiejscowienie powoduje wytworzenie ruchu wirowego wewnątrz cyklonu,
- *komora separacyjna* — tu zachodzi rzeczywisty rozdział, cząstki fazy stałej gromadzą się przy zewnętrznej ścianie, a następnie opadają w dół,
- *out* — górny wylot odprowadza gaz oczyszczony z cząstek fazy stałej
- *dust out* — wylot odprowadzający wyseparowane ze strumienia gazu cząstki fazy stałej.

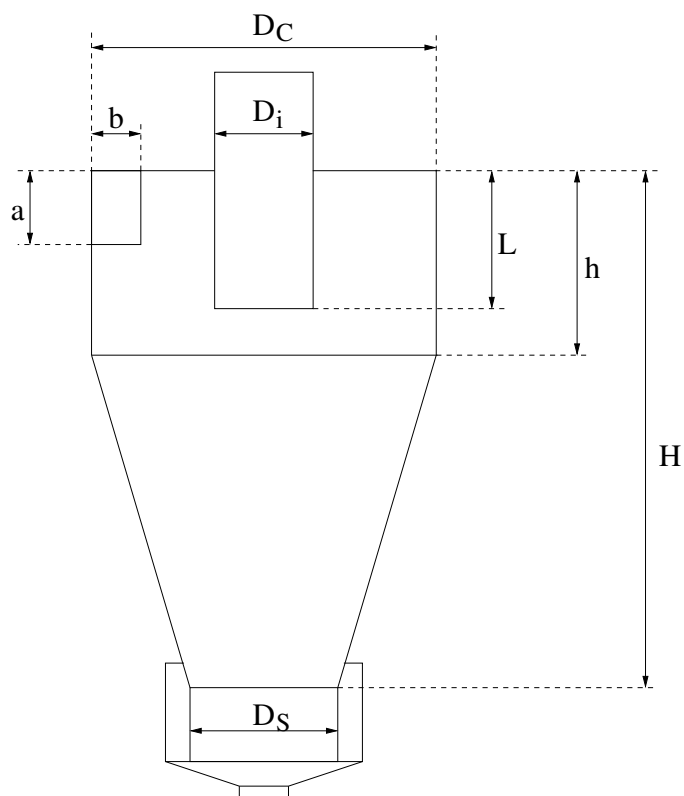


Rysunek 10: Schemat cyklonu, zaznaczone: wlot(*in*), wyloty(*out*, *dust out*) i komora separacyjna

## 5.2 Budowa cyklonu

Schemat cyklonu przedstawiony został na rysunku 11. Na schemacie zaznaczone zostały wielkości charakteryzujące jego geometrię. Przykładowe geometrie cyklonów zestawione zostały w tabeli 1, wszystkie wymiary podaje się w stosunku do średnicy przekroju urządzenia ( $D_c$ ). Większość modeli przewidujących działanie cyklonu bazuje na takich rozmiarach zredukowanych. Przy tak zdefiniowanej geometrii należy w sposób bezwzględny określić średnicę  $D_c$ .

Obliczenia wykonane w ramach pracy dotyczyły zaznaczonej w tabeli 1 geometrii *Stairmand* [1], dla takiego układu dostępne były wyniki pomiarów doświadczalnych.

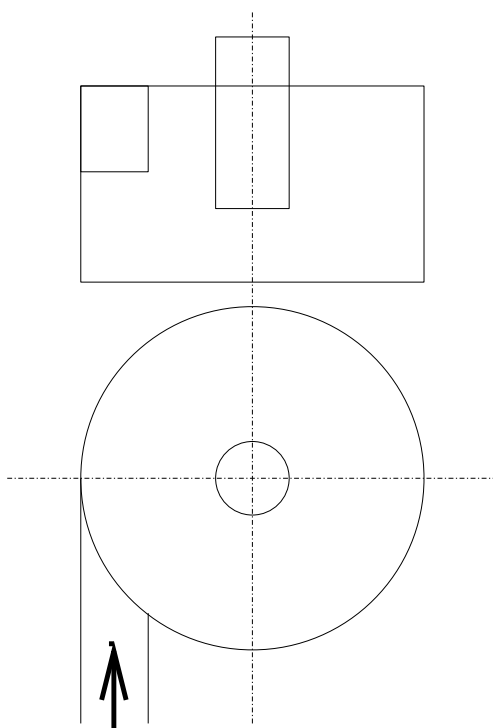


Rysunek 11: Schemat cyklonu z zaznaczonymi wielkościami, poprzez które definiowana jest geometria

Geometria	$a/D_c$	$b/D_c$	$D_s/D_c$	$D_i/D_c$	$H/D_c$	$L/D_c$	$h/D_c$
LAPPLE	0.5	0.25	0.25	0.5	4	0.625	2
SWIFT1	0.5	0.25	0.4	0.5	3.75	0.6	1.75
SWIFT2	0.44	0.21	0.4	0.4	3.9	0.5	1.4
STAIRMAND	0.5	0.2	0.375	0.5	4	0.5	1.5
PETERSON	0.583	0.208	0.5	0.5	3.173	0.583	1.333
LORENZ1	0.533	0.133	0.333	0.333	2.58	0.733	0.693
LORENZ2	0.533	0.133	0.333	0.233	2.58	0.733	0.693
LORENZ3	0.4	0.1	0.333	0.233	2.58	0.733	0.693

Tablica 1: Zestawienie geometrii cyklonów [1]

Na rysunku 12 przedstawiony został schemat wlotu (jednego z możliwych) zastosowanego przy obliczeniach.



Rysunek 12: Schemat wlotu, zastosowanego przy obliczeniach

### 5.3 Efektywność rozdziału

Działanie cyklonu można scharakteryzować jakościowo za pomocą różnych parametrów. Pierwszym, a zarazem decydującym o możliwości zastosowania układu o danej geometrii, jest efektywność rozdziału cząstek fazy stałej z mieszaniny.

$$eff = \frac{\Phi_{dust\_out}}{\Phi_{in}} \quad (67)$$

Parametr ten wyraża stosunek całkowitego strumienia cząstek fazy stałej przez wyjście odprowadzające popiół, do strumienia cząstek wchodzących do układu.

## 6 Analiza wyników

### 6.1 Parametry analizowanego układu

Jak wspomniałem wcześniej obliczenia wykonane zostały dla cyklonu o geometrii typu *Stairmand*. Charakterystyczne wymiary (oznaczone na rysunku 11, na stronie 29) są w tym przypadku następujące:

$$a/D_c = 0.5$$

$$b/D_c = 0.2$$

$$D_s/D_c = 0.375$$

$$D_i/D_c = 0.5$$

$$H/D_c = 4$$

$$L/D_c = 0.5$$

$$h/D_c = 1.5$$

Średnica cyklonu została przyjęta jako:

$$D_c = 0.4m$$

Fizyczne warunki modelowanego przepływu są następujące:

- ciśnienie  $P = 1.7bar$
- temperatura  $T = 293K$
- gęstość fazy stałej  $\rho_p = 2640 \frac{kg}{m^3}$
- wejściowa prędkość gazu  $u_{in} = 11 \frac{m}{s}$

## 6.2 Wyniki uzyskane metodą mieszaniny

Ten wariant obliczeń obejmuje:

- Zastosowanie modelu mieszaniny, obliczenia wykonane dla mieszaniny powietrza jako gazu nośnego oraz dodatkowych faz, opisujących cząstki popiołu o gęstości  $\rho_p = 2640 \frac{kg}{m^3}$  i średnicach:  $1\mu m, 2\mu m, 5\mu m, 7\mu m, 10\mu m, 15\mu m, 20\mu m, 30\mu m, 50\mu m$ . Frakcje objętościowe każdej z faz stałych w strumieniu wejściowym  $\alpha = 10^{-4}$ .
- Wyznaczanie gęstości powietrza w oparciu o równanie stanu nieściśliwego gazu doskonałego:

$$\rho = \frac{p_{op}}{\frac{R}{M}T} \quad (68)$$

gdzie  $R$  jest stałą gazową,  $T$  temperaturą,  $M$  masą molową,  $p_{op}$  określa ciśnienie robocze przyjęte dla przepływu.

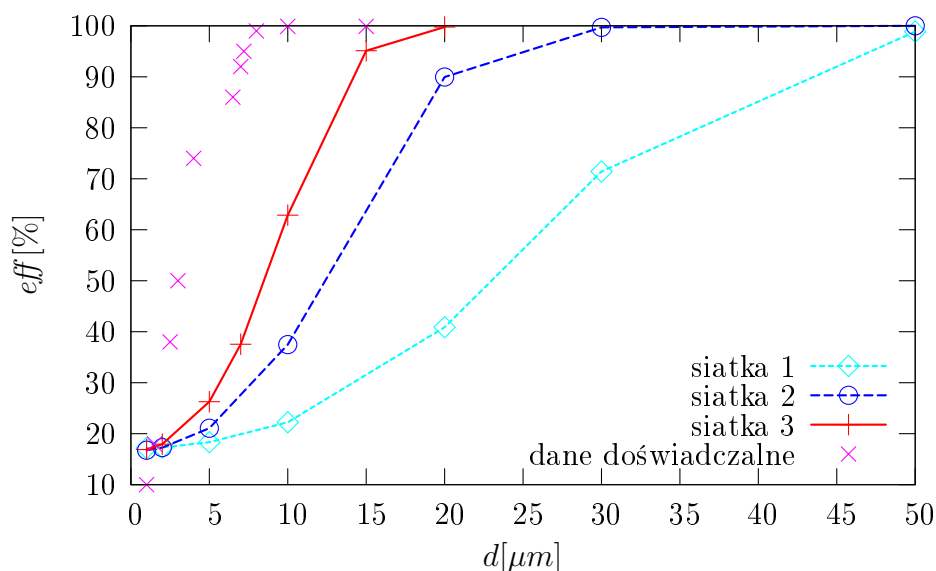
- Zastosowanie standardowego modelu  $k - \epsilon$  do opisu turbulencji.
- Określenie warunku brzegowego na powierzchni wlotu poprzez *velocity inlet*, z ustaloną prędkością  $u_{in} = 11 \frac{m}{s}$ .
- Określenie warunków brzegowych na wylotach poprzez wypływ — *outflow*. Wagi dla wyjść są następujące:

- *out*  $w_1 = 1$ ,
- *dust out*  $w_2 = 0.2$ .

Pierwszym etapem w realizowanych obliczeniach był dobór odpowiedniej siatki dyskretyzacji. Siatka o małej liczbie węzłów pozwala na szybkie wykonanie obliczeń, nawet z zastosowaniem najbardziej precyzyjnych, ale za razem skomplikowanych modeli. Wraz ze wzrostem ilości węzłów i komórek siatki rośnie ilość operacji, a więc także czas wykonywanych obliczeń. Gęstsza siatka pozwala na lepsze odwzorowanie rozkładu wielkości fizycznych w analizowanym obszarze. W przypadku układów takich jak cyklon jest to szczególnie ważne. Obszary o dużych gradientach wielkości fizycznych powinny być pokryte punktami odpowiednio gęsto. Wzrost czasu obliczeń i pamięci potrzebnej do ich wykonania oraz do zapisania stanu układu, ogranicza rozmiar siatek. Z tego względu jest także ważny odpowiedni dobór wykorzystanych metod i stosowanych modeli. Obliczenia aby mogły znaleźć praktyczne zastosowanie powinny odbywać się w możliwie krótkim czasie, jednocześnie zapewniając wyniki spełniające postawione wymagania. Niektóre z wykonywanych przeze mnie obliczeń trwały przeszło tydzień, pomimo wykorzystania komputera dużej mocy obliczeniowej.



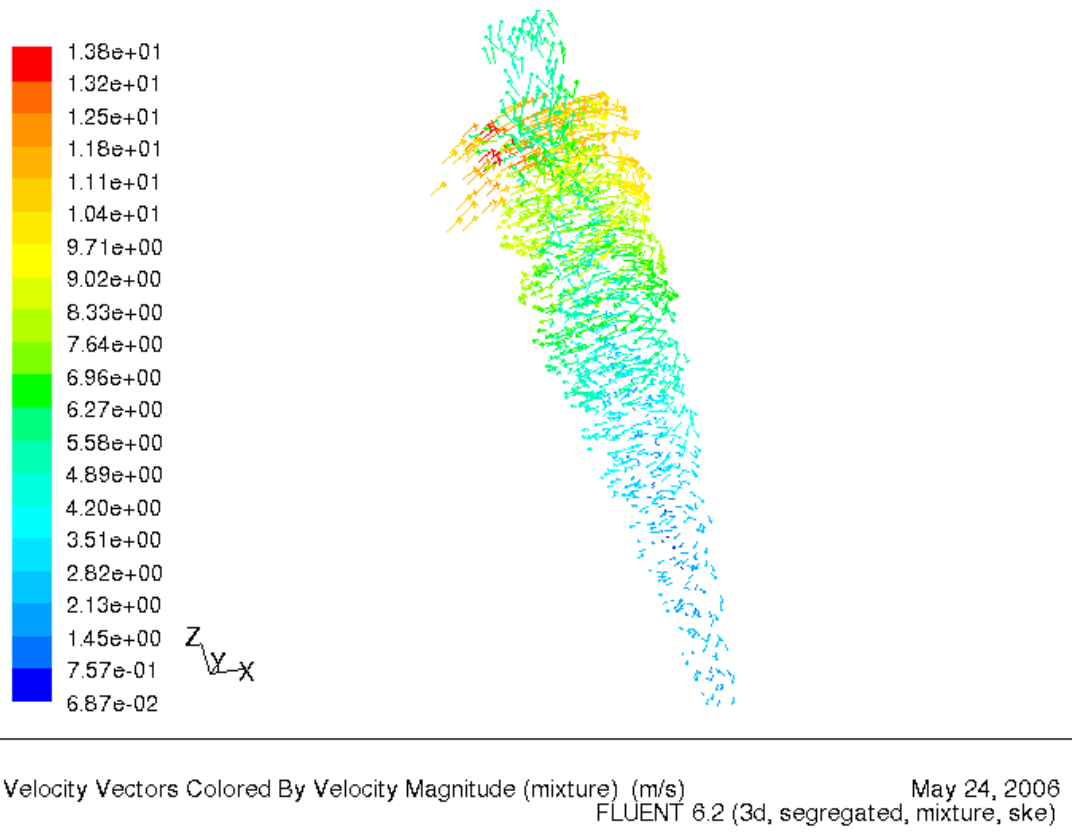
Na wykresie (Rysunek 13) przedstawiłem zależność efektywności rozdziału od średnicy cząstek fazy stałej, wyznaczoną przy zastosowaniu różnych siatek dyskretyzacji. Wielkości siatek zastosowanych do symulacji zestawilem w tabeli 2. Efektywność rozdziału  $eff$  została wyznaczona na podstawie wzoru (67) opisanego na stronie 30. Przy wyznaczaniu tej wielkości skorzystałem z funkcji programu Fluent, wyznaczającej strumienie masy danej fazy przez wskazane powierzchnie. Uzyskane wyniki porównałem z danymi doświadczalnymi zaczerpniętymi z artykułu [1].



Rysunek 13: Porównanie efektywności wyznaczonej przy różnych rozmiarach siatki

	liczba komórek <i>cells</i>	liczba powierzchni <i>faces</i>	liczba wierzchołków <i>nodes</i>
siatka 1	2252	4988	646
siatka 2	17082	36012	3821
siatka 3	122715	252630	24139

Tablica 2: Zestawienie rozmiarów wykorzystanych siatek

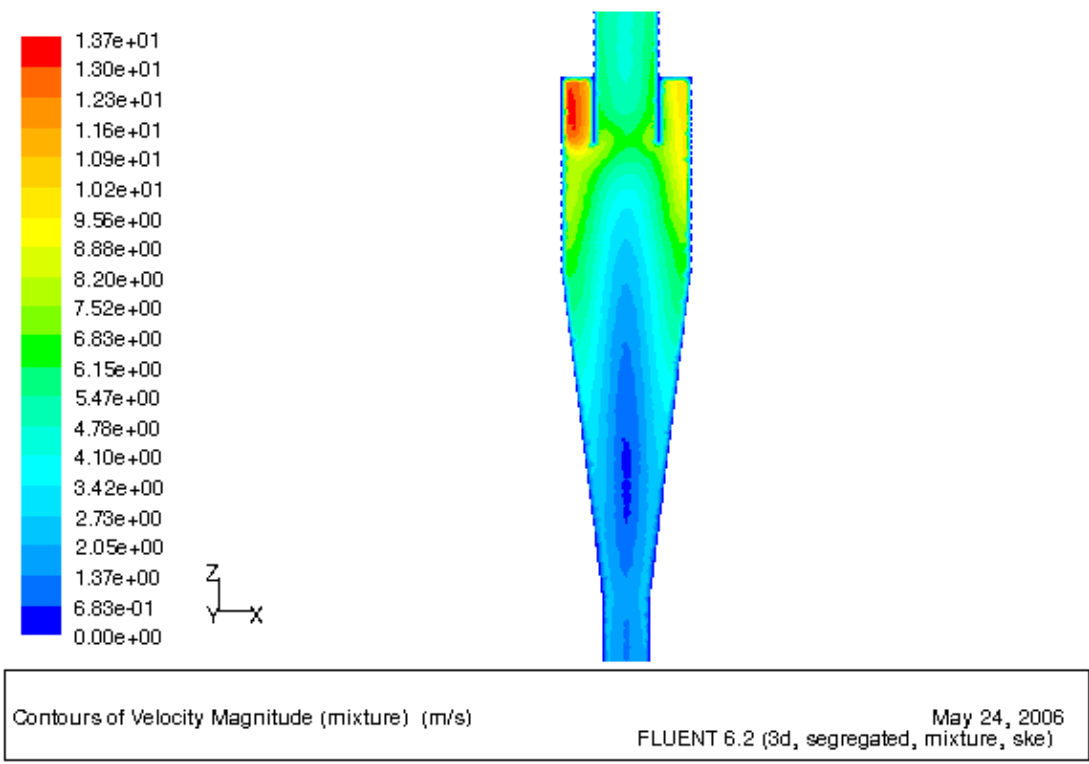


Rysunek 14: Pole wektorowe prędkości wewnątrz cyklonu

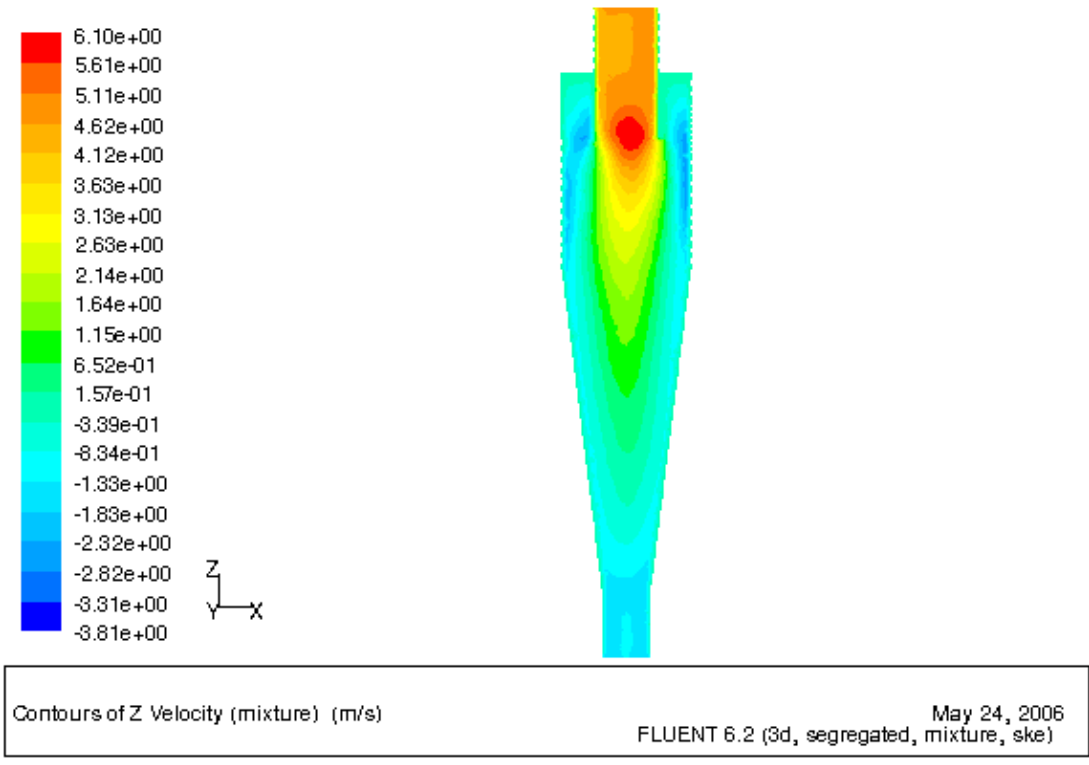
Rysunek 14 przedstawia wektorowe pole prędkości w obszarze wewnątrz cyklonu. Przedstawiona w ten sposób informacja posiada charakter jakościowy — daje obraz zachowania mieszaniny gaz — cząstki fazy stałej, w cyklonie oraz ilościowy poprzez oznaczenie wartości wektorów.

Na rysunku 15 zaznaczone zostały kontury wartości prędkości. Wykres ten, jak i następane przedstawia wartości na powierzchni przekroju pionowego cyklonu, wlot umiejscowiony jest po lewej stronie, prostopadle do widocznej powierzchni (XZ).

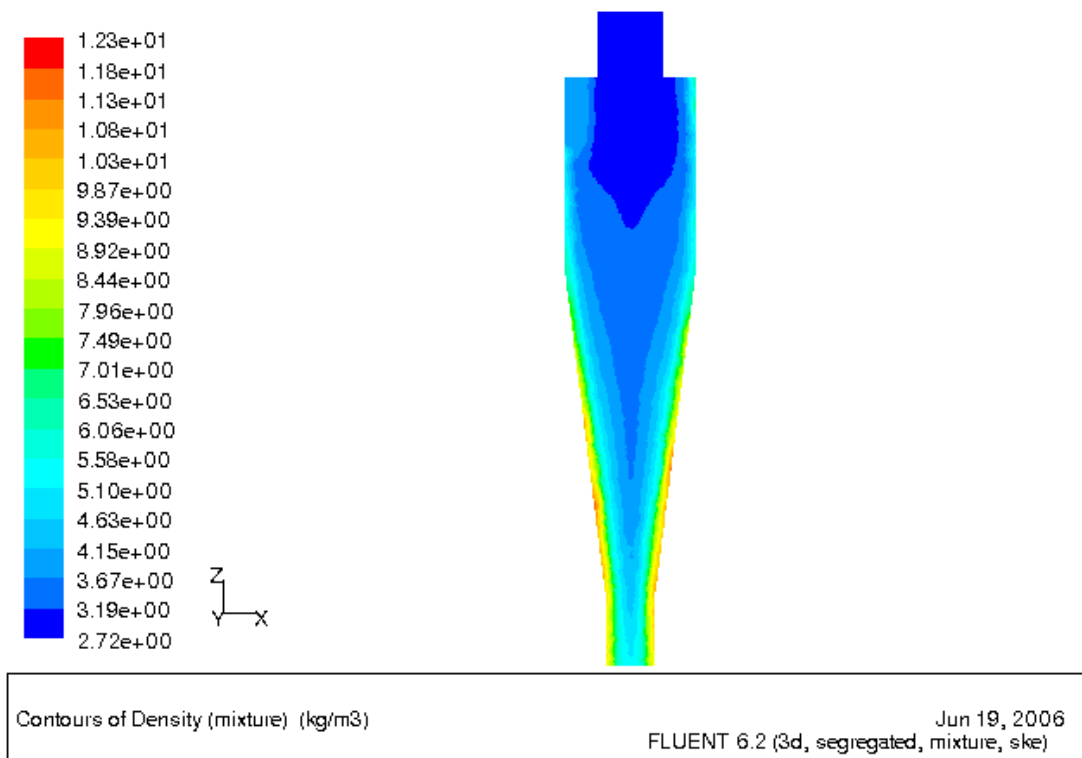
Na rysunku 16 przedstawiona została pionowa składowa wektora prędkości ( $v_z$ ) mieszaniny (na powierzchni XZ). Wartości dodatnie oznaczają ruch gazu do góry, ujemne w dół (w kierunku wyjścia odprowadzającego popiół). Na tej podstawie można podzielić obszar wewnątrz cyklonu na dwie części, co ma związek z zachodzącym procesem separacji. Do obszaru o dodatniej wartości  $v_z$  dociera gaz zubożony w cząstki fazy stałej.



Rysunek 15: Pole wartości prędkości wewnątrz cyklonu



Rysunek 16: Pionowa (Z) składowa prędkości wewnątrz cyklonu ( $v_z$ )

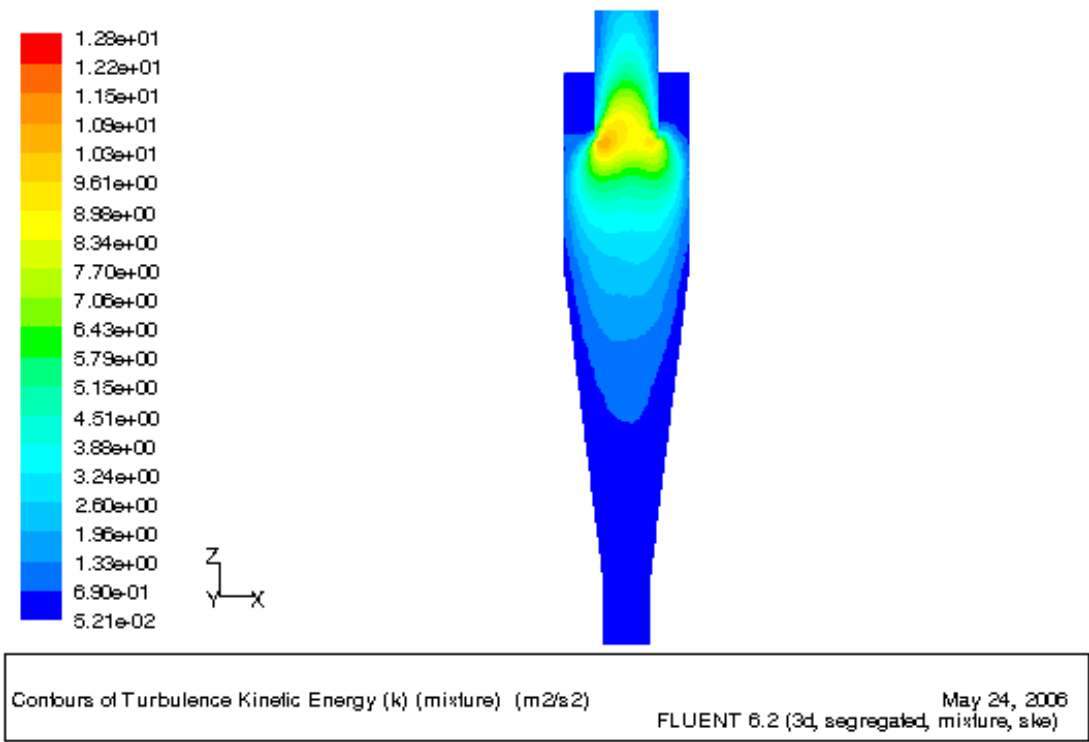


Rysunek 17: Rozkład gęstości

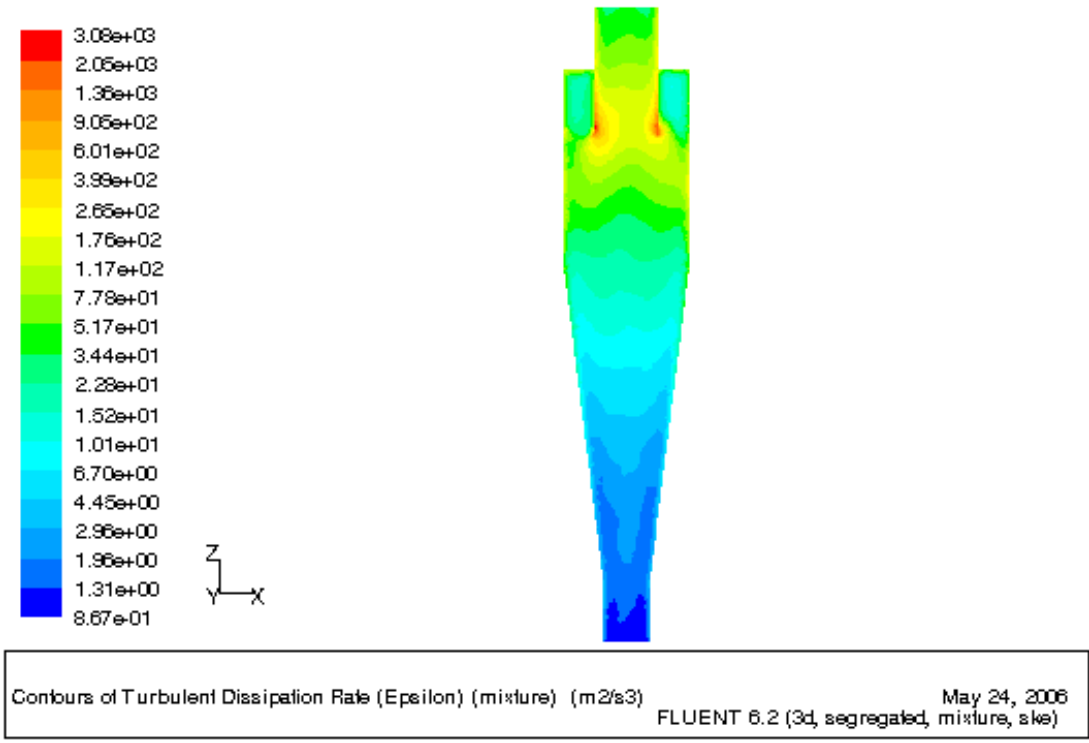
Rysunki 18 i 19 przedstawiają rozkłady wielkości opisujących turbulencje. Ponieważ w obliczeniach wykorzystany został standardowy model  $k - \epsilon$  wielkościami tymi są:

- energia kinetyczna turbulencji —  $k$ ,
- rozpraszanie energii kinetycznej turbulencji —  $\epsilon$ .

Analiza rozkładów wielkości opisujących turbulencje może być użyteczna przy optymalizacji geometrii cyklonu. Ilość energii rozpraszana na skutek turbulencji, oznacza stratę energii, tak więc większą różnicę ciśnień na wyjściu i wejściu lub mniejszą prędkość przepływu. Najsilniejsze turbulencje powstają przy końcu wylotu.



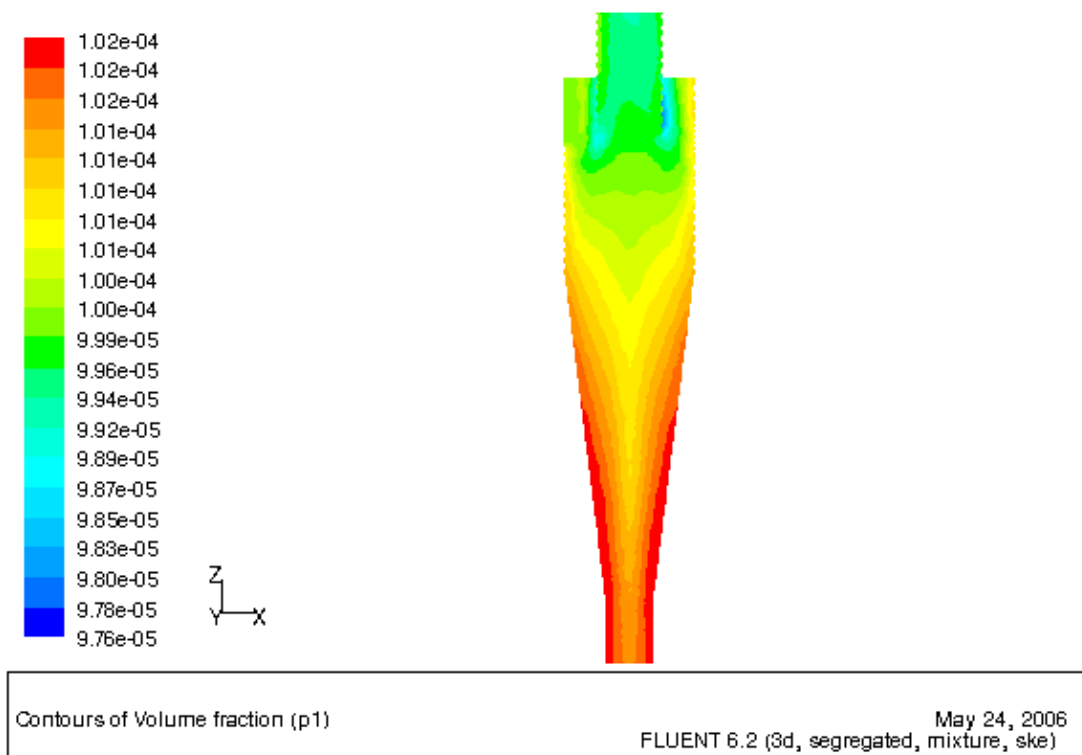
Rysunek 18: Energia kinetyczna turbulencji —  $k$



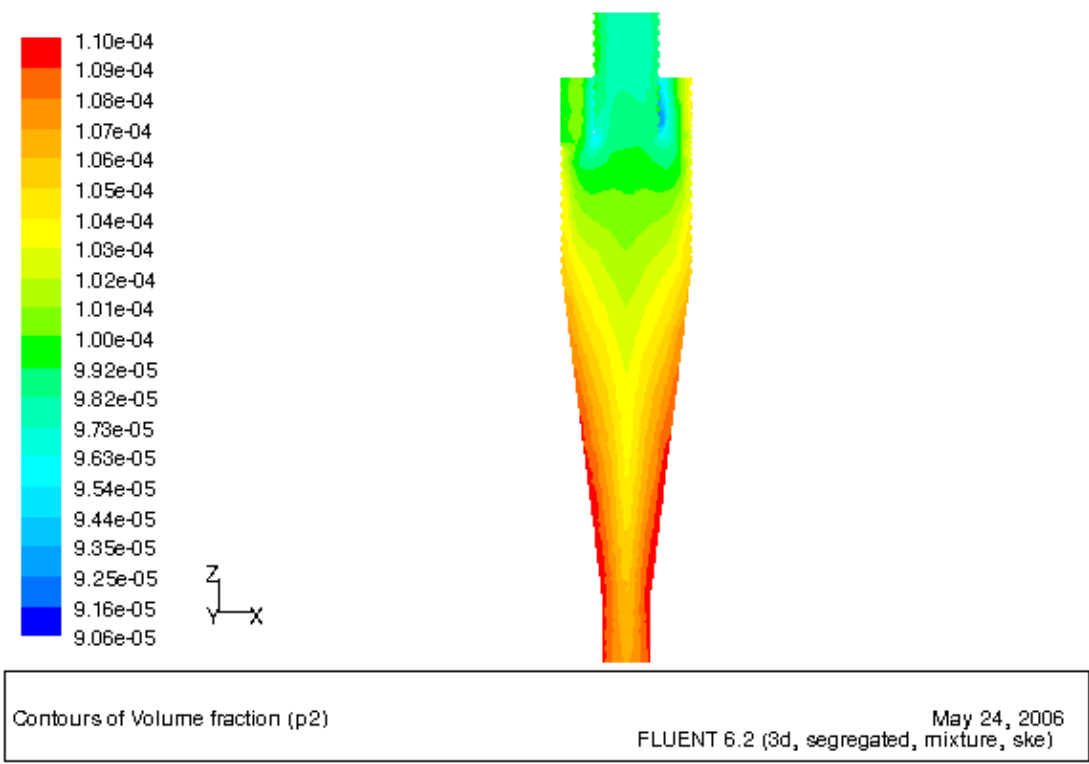
Rysunek 19: Dyssypacja energii kinetycznej turbulencji —  $\epsilon$

Rysunki 20 – 26 przedstawiają wyznaczone z zastosowaniem modelu mieszaniny koncentracje cząstek fazy stałej o różnych granulacjach. W zestawieniu z rozkładem wartości pionowej składowej prędkości ( $v_z$ ) pomagają one zaobserwować, sposób w jaki zachodzi separacja.

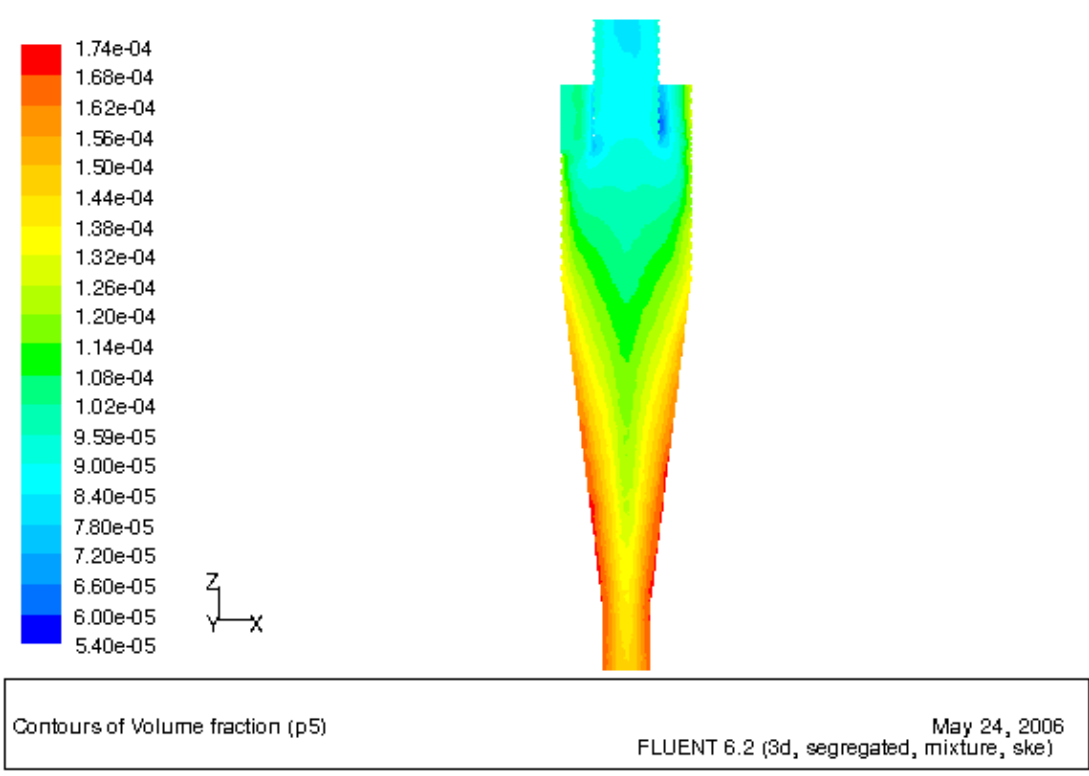
Można posłużyć się tu pewnym uproszczeniem. Zakładając, że różnicowanie koncentracji cząstek poszczególnych faz, odbywa się na skutek ruchu wirowego (cząstki fazy stałej są *wypychane* na zewnątrz). Natomiast faktyczna separacja, czyli rozdział polega na tym, że cząstki cięższe opadają do wyjścia odprowadzającego popiół, a gaz zawierający jedynie najlżejsze cząstki, środkową częścią cyklonu, wydostaje się do wylotu w górnej części. Na rysunku 27 przedstawiłem obszar cyklonu, w którym wartości pionowej składowej prędkości są dodatnie, gaz z tego obszaru jest kierowany do wylotu. Przedstawione poniżej rysunki pozwalają na jakościową analizę procesu separacji. Widać jak wraz ze wzrostem średnicy cząstek fazy stałej zróżnicowanie koncentracji jest większe. Przy większych średnicach koncentracja w centralnej części cyklonu jest wyraźnie mniejsza, takie cząstki są silnie separowane. Odwrotnie jest w przypadku fazy stałej o bardzo małej średnicy ziaren. Koncentracja w obszarze cyklonu jest zdecydowanie mniej zróżnicowana, a co za tym idzie separacja jest mniej wydajna.



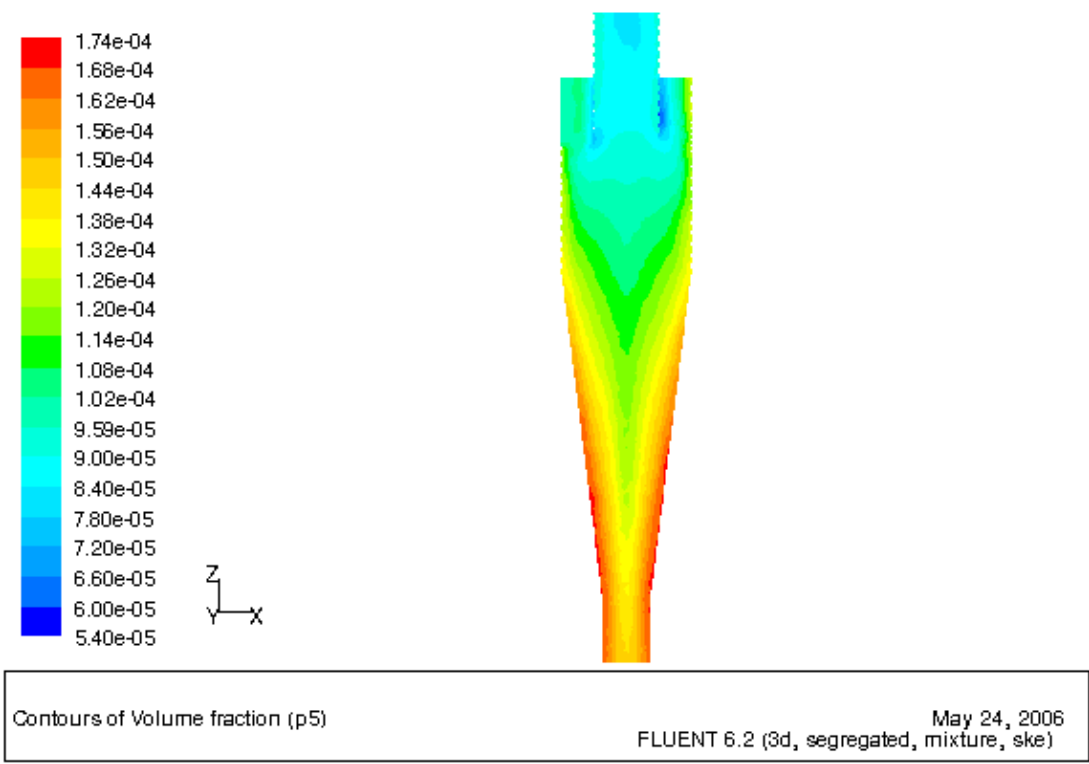
Rysunek 20: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $1\mu m$



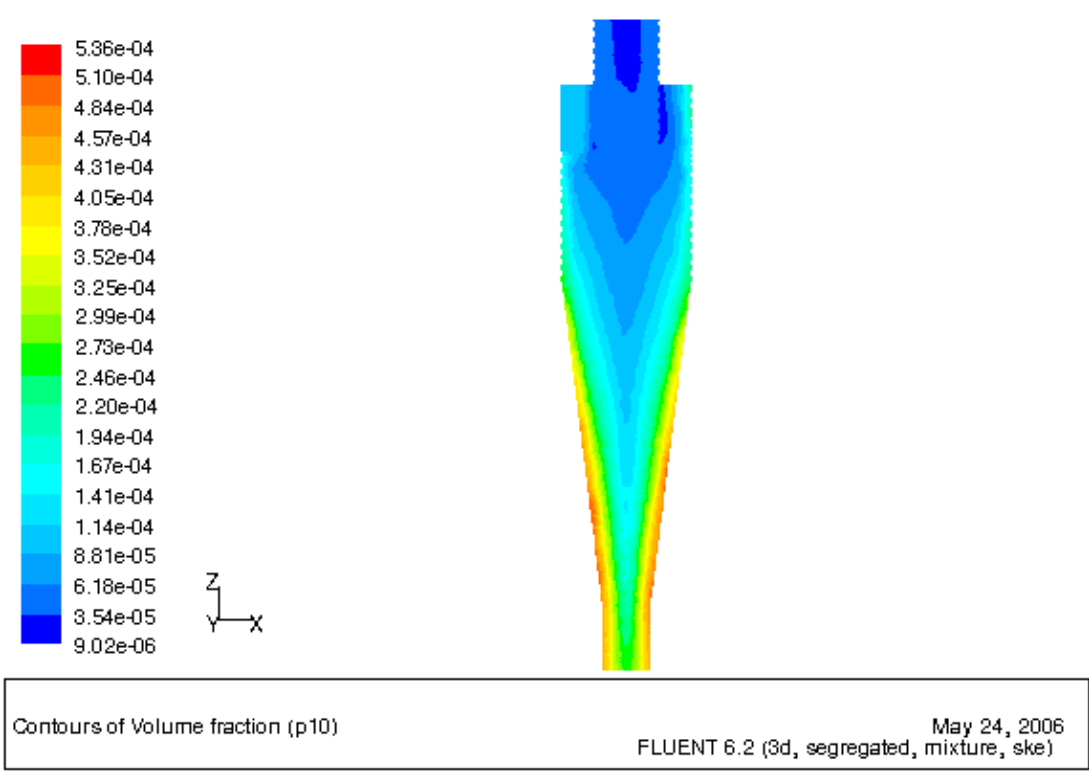
Rysunek 21: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $2\mu m$



Rysunek 22: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $5\mu m$

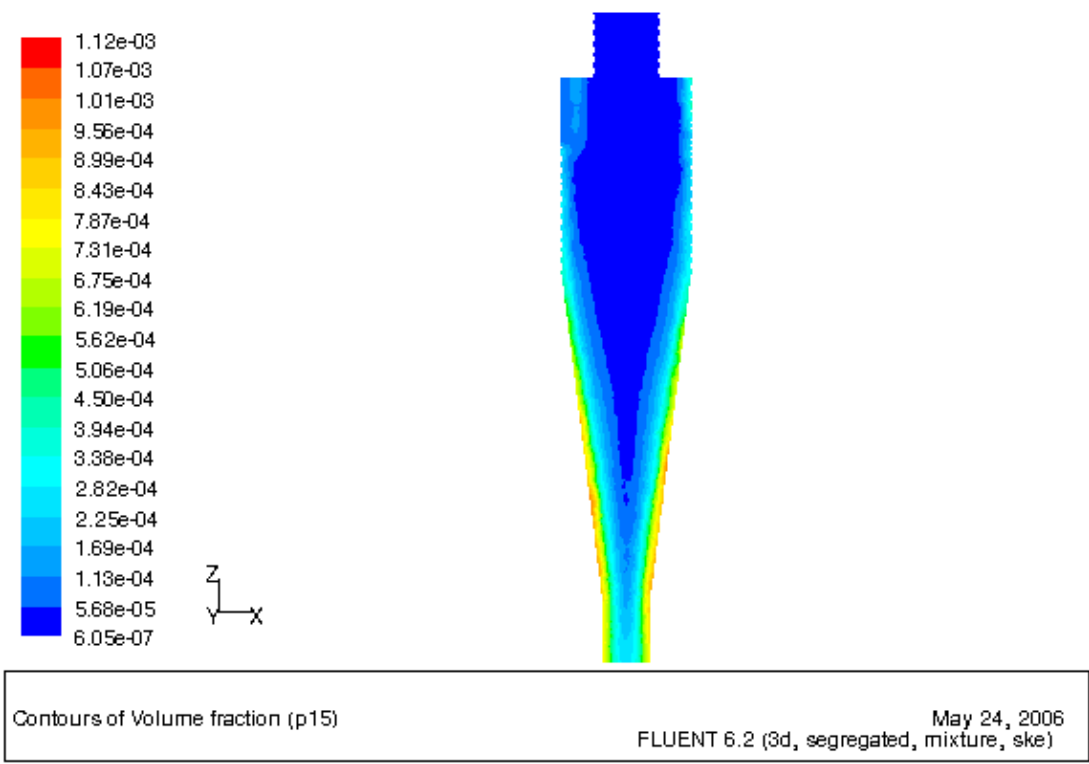


Rysunek 23: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $7\mu m$

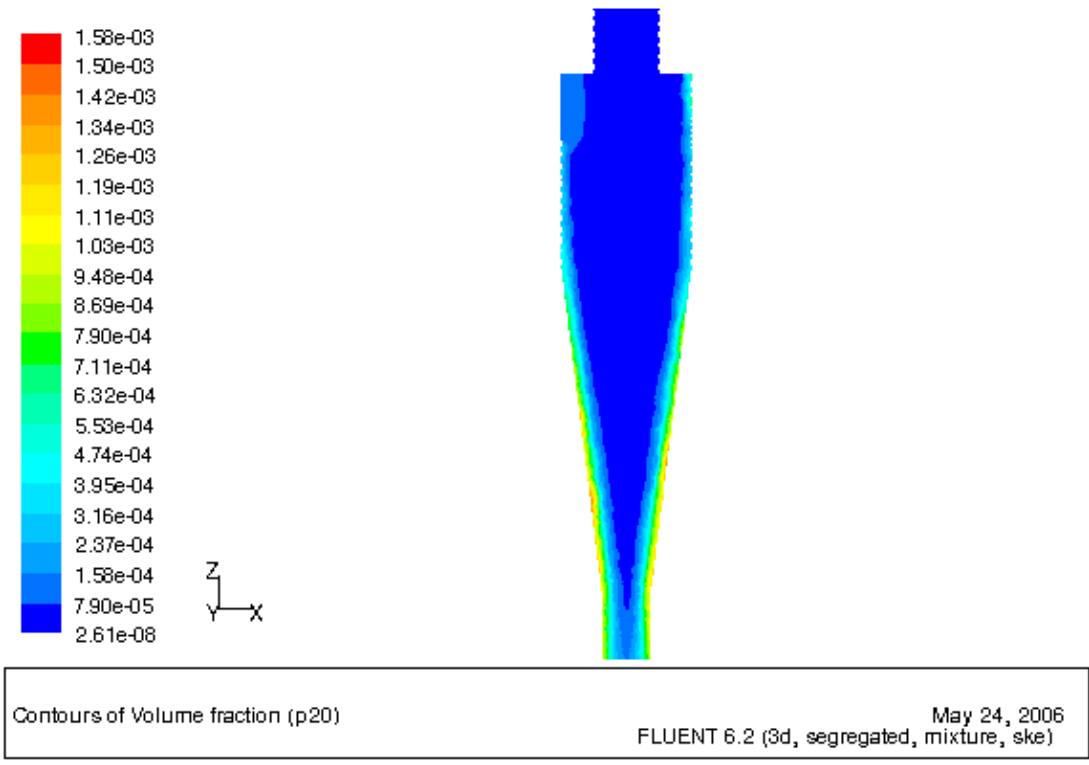


Rysunek 24: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $10\mu m$



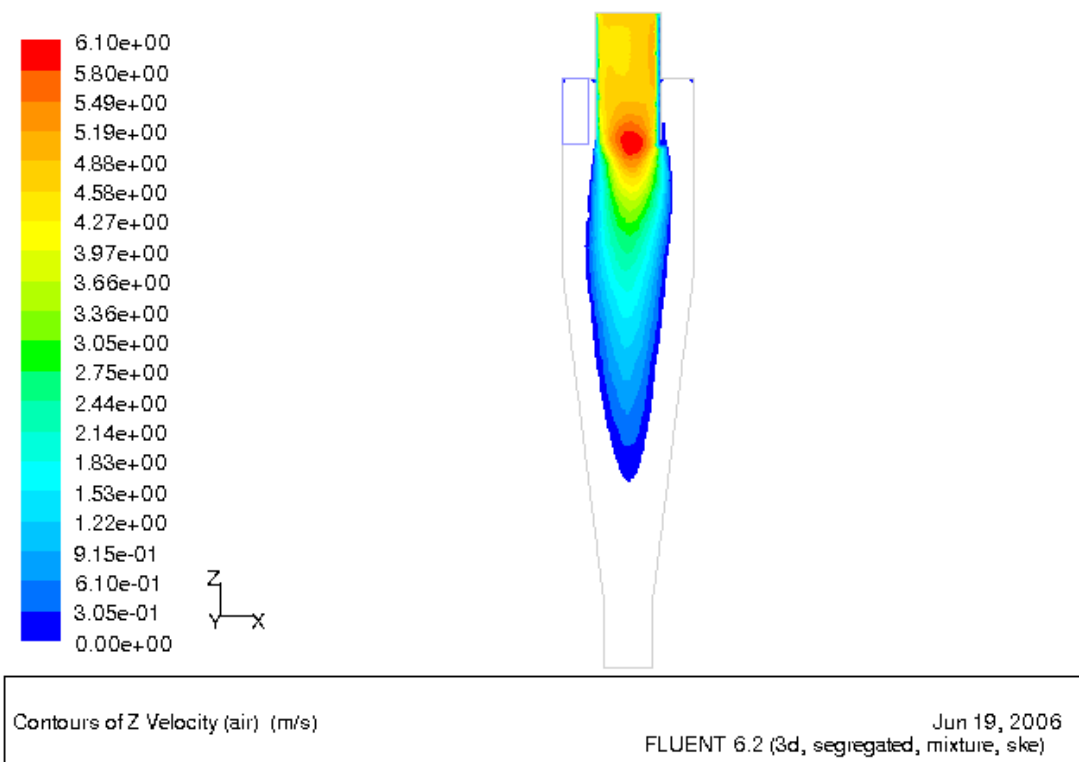


Rysunek 25: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $15\mu m$



Rysunek 26: Koncentracja cząstek fazy stałej o średnicy  $20\mu m$

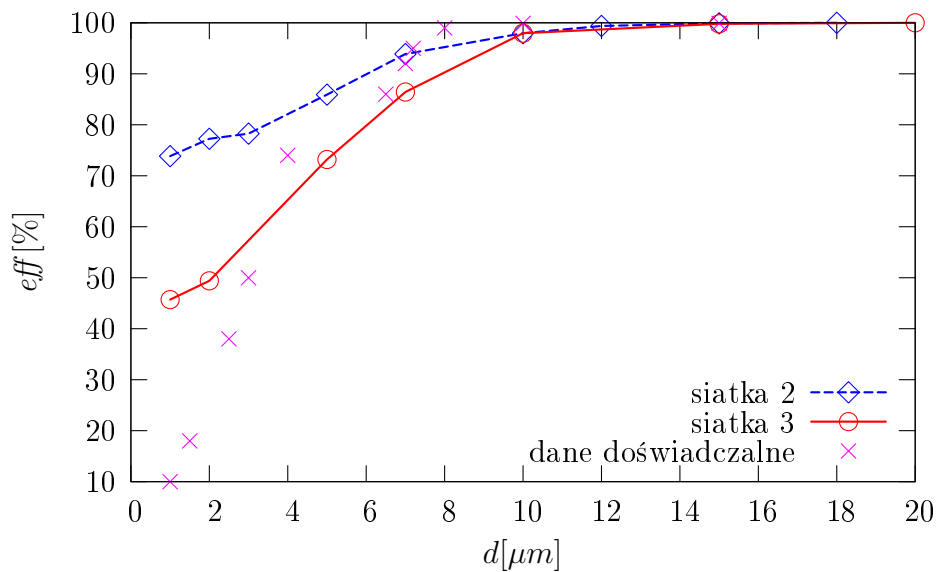
Dla cząstek o średnicy powyżej  $7\mu m$  w obszarze, gdzie pionowa składowa prędkości jest dodatnia, koncentracje są niewielkie, tak więc do wylotu dociera gaz zawierający niewielką ilość cząstek — *oczyszczony*.



Rysunek 27: Obszar o dodatniej pionowej (Z) składowej prędkości

### 6.3 Wyniki uzyskane metodą śledzenia cząstek

Metoda ta wymaga w pierwszej kolejności wyznaczenia przepływu *czystego* gazu. Należy wykonać symulację przepływu jednofazowego. Dysponując wyznaczonymi rozkładami wielkości opisujących przepływ gazu nośnego, można prześledzić zachowanie cząstek fazy stałej o określonej średnicy. Metodę wyznaczania trajektorii cząstki opisałem rozdziale 4.2. Obliczenia takie wykonałem dla cząstek o gęstości  $\rho_p = 2640 \frac{kg}{m^3}$ , czyli takiej samej jak w przypadku poprzedniej metody. W tym przypadku efektywność rozdzału wyznaczałem jako stosunek liczby cząstek, które opuściły układ przez wyjście odprowadzające popiół, do liczby cząstek, których trajektorie były śledzone. Wyznaczone efektywności rozdzału w zależności od średnicy cząstki przedstawiłem graficznie na wykresie poniżej. Dane doświadczalne pochodzą z artykułu [1].

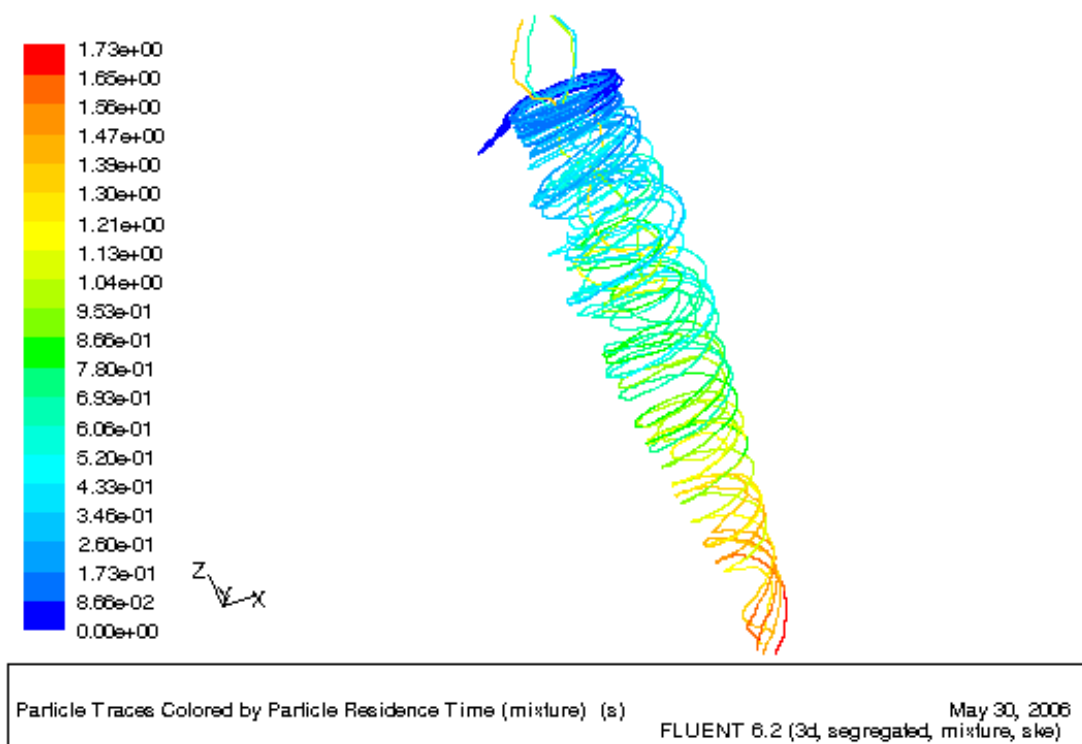


Rysunek 28: Porównanie efektywności wyznaczonych metodą śledzenia cząstek

	liczba komórek <i>cells</i>	liczba powierzchni <i>faces</i>	liczba wierzchołków <i>nodes</i>
siatka 2	17082	36012	3821
siatka 3	122715	252630	24139

Tablica 3: Zestawienie rozmiarów siatek, wykorzystanych w metodzie śledzenia cząstek

Na wykresie 29 przedstawiłem przykładowe trajektorie cząstek o średnicy  $5\mu m$ . Kolorem zaznaczony został czas przebywania cząstki w układzie.



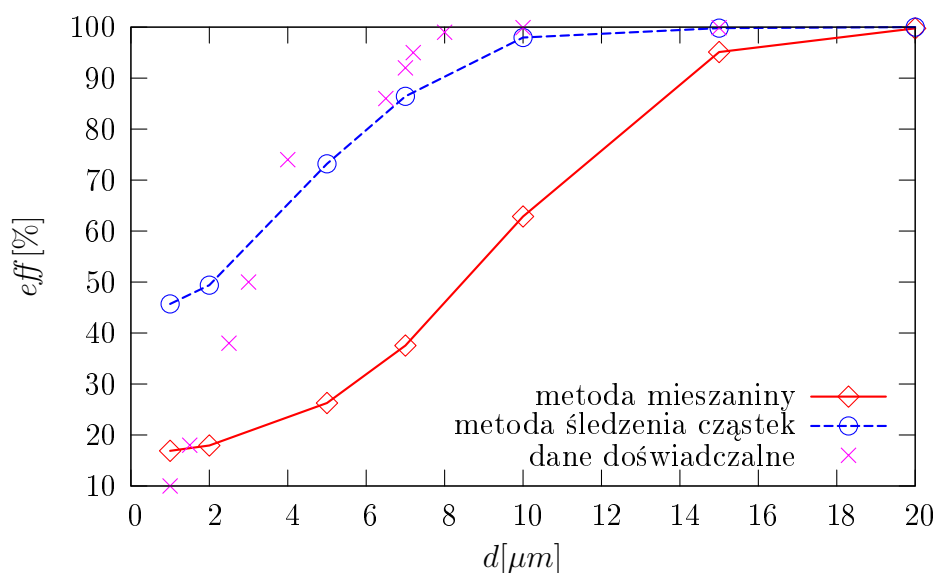
Rysunek 29: Trajektorie cząstek o średnicy  $5\mu m$ , wyznaczone metodą śledzenia cząstek

## 7 Podsumowanie i wnioski

Realizując niniejszą pracę zapoznałem się z zagadnieniami związanymi z modelowaniem dynamiki płynów, począwszy od podstawowych równań hydrodynamiki, jakimi są równanie ciągłości i równanie Navier – Stokesa, poprzez modele ułatwiające opis turbulencji, do sposobów wyznaczania przepływów wielofazowych. Dokładny opis wszystkich zjawisk zachodzących w mieszaniu ciecz — faza stała, na potrzeby obliczeń jest niemożliwy. W związku z tym ważny jest optymalny dobór stosowanych modeli.

W ramach obliczeń zająłem się przepływem mieszaniny powietrze — cząstki fazy stałej, w *cyklonie*. Jest to układ, dla którego istnieje kilka modeli analitycznych, wykorzystujących jednak wiele upraszczających założeń. Żaden z nich nie pozwala na zadowalające wyznaczenie wszystkich parametrów przepływu, dla dowolnej geometrii oraz warunków [1]. Symulacje numeryczne oparte na ogólnych modelach hydrodynamiki, potencjalnie mogą znaleźć szerokie zastosowanie, pod warunkiem jednak że zdołają dokładnie odwzorować zjawisko.

Do realizacji obliczeń wykorzystałem oprogramowanie firmy FLUENT. Program Gambit pozwala na wprowadzenie, geometrii nawet skomplikowanych układów. Jest także pomocny przy generowaniu odpowiedniej siatki dyskretyzacji. Przygotowany, przy użyciu programu Gambit, układ posłużył do realizacji obliczeń za pomocą Fluent. Gotowe komercyjne oprogramowanie pozwala na wybór spośród wielu modeli opisujących poszczególne zjawiska oraz określenie ich parametrów, za pomocą graficznego interfejsu. Dzięki możliwości zapisywania poleceń w osobnym pliku skryptu, długotrwałe obliczenia można wykonywać zdalnie, na odpowiednim komputerze.



Rysunek 30: Porównanie efektywności rozdzielania wyznaczonych metodą mieszaniny oraz śledzenia cząstek, z danymi doświadczalnymi

Zestawienie wyników uzyskanych metodami mieszaniny oraz śledzenia cząstek, z danymi doświadczalnymi zaczerpniętymi z artykułu [1] przedstawiłem na wykresie (Rysunek 30). Wartości te zostały odczytane na podstawie wykresów, nie posiadają określonej niepewności.

Metoda mieszaniny, nie odwzorowała wyników doświadczalnych. Wartości efektywności rozdziału są zaniżone. W modelowanym przepływie cząstki o średnicach  $7\mu m$  są separowane z efektywnością 40%, natomiast według danych doświadczalnych powinny być separowane z efektywnością powyżej 95%. Wyraźna poprawa jest widoczna wraz ze zwiększaniem zagęszczenia siatki. Jednak zastosowanie siatki jeszcze większej niż w przypadku przeprowadzonych obliczeń jest ograniczane przez dostępną pamięć operacyjną konieczną do przechowywania informacji o wielkościach opisujących przepływ. Wraz z zagęszczeniem siatki drastycznie rośnie zapotrzebowanie na pamięć operacyjną oraz dyskową niezbędną do zapisania wyników obliczeń, wydłuża się także czas ich realizacji. Metodą pozwalającą na poprawę wyników mogło by być dostosowanie zagęszczenia siatki do specyfiki układu (większe zagęszczenie punktów przy brzegach, mniejsze wewnątrz obszaru, gdzie gradienty koncentracji i prędkości są mniejsze).

Metoda śledzenia cząstek lepiej odwzorowuje zachowanie cząstek o średnicach przy których efektywność separacji maleje ze 100%. W tym przypadku jednak ze znaczną efektywnością separowane są cząstki o bardzo małych średnicach ( $1 - 2\mu m$ ). Taka rozbieżność może częściowo wynikać z faktu, iż przy zastosowaniu metody śledzenia cząstek, pole przepływu jest wyznaczone bez udziału fazy stałej, która mogłaby wpływać na jego kształt.

Przeprowadzone obliczenia nie pozwoliły na uzyskanie wyników zgodnych z danymi doświadczalnymi. Mogą jednak być podstawą do dalszych poszukiwań metod jak najprecyzyjniejszej symulacji zachowania mieszaniny.

Znajomość podstaw teoretycznych modeli, jest ważna przy ich doborze, oraz interpretacji wyników. Realizując tą pracę nacisk położyłem na zapoznanie się z teorią dotyczącą modelowanych zjawisk i samymi modelami. Przeprowadzone symulacje, pomimo, że wartości efektywności rozdziału wyznaczone na ich podstawie nie są zgodne z danymi doświadczalnymi, odwzorowują jakościowo zachowanie mieszaniny w *cyklonie*.

## Literatura

- [1] S. Altmeyer, V. Mathieu, S. Jullemier, P. Contal, N. Midoux, S. Rode J.-P. LeCre:  
*Comparrison of diferent models of cycleone prediction performance for various operating conditions using a general software*  
Chemical Engineering and Processing 43 (2004)
- [2] Bronisław Średniawa:  
*Hydrodynamika i Teoria Sprężystości*  
PWN, Warszawa 1977
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands:  
*Feynmana wykłady z fizyki, tom 2.2*  
Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001
- [4] Andrzej Lenda:  
*wykład: Fizyka Transportu*  
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH
- [5] Mark M. Clark:  
*Transport modeling for enviromental engineers and scientists*  
John Wiley & Sons, 1996
- [6] Vivek V. Ranade:  
*Computational Flow Modeling for Chemical Reactor Engineering*  
Academic Press, 2002
- [7] *Fluent help*
- [8] <http://www.fluent.com>
- [9] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>
- [10] <http://scienceworld.wolfram.com>