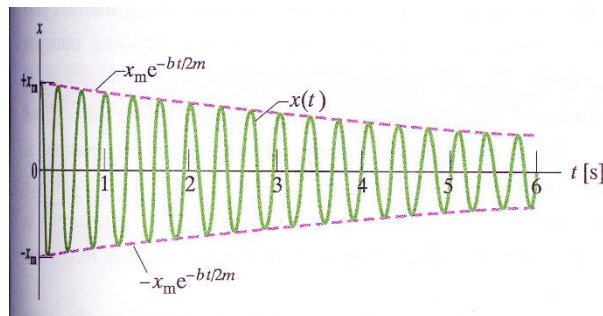


Ruch drgający, grawitacja.

- Zależność położenia od czasu punktu materialnego o masie $m = 10 \text{ g}$ ma postać: $x = 0,1 \sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Znaleźć: (a) okres drgań T ; (b) maksymalną prędkość i moment jej osiągnięcia; (c) maksymalne przyspieszenie i odpowiadający tej wartości najbliższy moment czasu; (d) wielkość maksymalnej siły działającej na punkt; (e) po jakim czasie, od chwili rozpoczęcia ruchu, punkt materialny przebędzie drogę od położenia zerowego do wychylenia maksymalnego?
Odp.: (a) $T = 16 \text{ s}$; (b) $v_{\max} = 0,05\pi/4 \text{ [m/s]}$, $t = 6 \text{ s}$; (c) $a_{\max} = 0,1\pi^2/64 \text{ [m/s}^2\text{]}$, $t = 2 \text{ s}$; (d) $F_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-5}\pi^2 \text{ [N]}$; (e) 4 s .
- Punkt materialny wykonuje ruch harmoniczny zgodnie z równaniem $x = A \cos \omega t$. Jak wielki jest stosunek energii kinetycznej punktu do jego energii potencjalnej po upływie czasu $t = T/12$ od chwili rozpoczęcia ruchu?
Odp.: $\tan^2 \omega t$.
- Przy jakiej prędkości v pociągu resory wagonów wpadają w rezonans pod wpływem stuku kół o miejsca styku szyn? Długość szyny wynosi 15 m ; na jeden resor przypada obciążenie $P = 6 \text{ t}$. Resor zgina się pod wpływem tego ciężaru o $s = 60 \text{ mm}$.
Odp.: $v = \frac{l\sqrt{g}}{2\pi s}$.
- Cząstka wykonuje drgania harmoniczne o okresie $0,4 \text{ s}$ i amplitudzie $0,1 \text{ m}$, poruszając się wzdłuż osi x w otoczeniu punktu $x = 0$. W chwili $t = 0$ cząstka ma największe wychylenie z położenia równowagi w ujemnym kierunku osi, tzn. znajduje się w punkcie $x = -0,1 \text{ m}$. Podaj wyrażenia opisujące zależność od czasu: a) położenia cząstki, b) jej prędkości.
- Tłumiony oscylator harmoniczny składa się z klocka o masie $m = 2 \text{ kg}$ i sprężyny o stałej sprężystości $k = 10 \text{ N/m}$, a siła tłumienia wynosi $F = -bv$. W pewnej chwili amplituda drgań wynosi 25 cm . Pod wpływem siły tłumienia amplituda ta maleje do trzech czwartych tej wartości po wykonaniu przez układ czterech pełnych cykli drgań. a) Wyznacz wartość stałej b . b) Ile energii stracił układ w ciągu tych czterech cykli drgań?
- a) Wyznacz stosunek maksymalnej wartości siły tłumienia ($b \frac{dx}{dt}$) do maksymalnej wartości siły sprężystości (kx) w czasie pierwszego cyklu drgań układu oscylatora, którego położenie przedstawione jest na rysunku ($m = 250 \text{ g}$, $k = 85 \text{ N/m}$, $b = 70 \text{ g/s}$). Czy ten stosunek zmienia się znacznie podczas dalszych drgań układu?



Zad. 6.

- Na fakt, że g ma różną wartość w różnych miejscach na Ziemi zwrócono uwagę w 1672 roku, gdy Jean Richer przewiózł zegar wahadłowy z Paryża do Kajenny w Gujanie Francuskiej i stwierdził, że spóźnia się on tam o $2,5 \text{ min.}$ na dobę. Oblicz wartość g w Kajennie, zakładając, że w Paryżu $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- Klocek o ciężarze 20 N jest zawieszony na pionowej sprężynie o $k = 100 \text{ N/m}$ przymocowanej drugim końcem do sufitu i wykonuje drgania. W pewnej chwili sprężyna jest wydłużona o $0,3 \text{ m}$ w stosunku do swej długości, gdy jest nieodkształcona (gdy nie podwieszono do niej żadnego ciężaru), a prędkość klocka jest wówczas równa zeru. a) Wyznacz siłę wypadkową działającą na klocek w tej chwili. Wyznacz b) amplitudę, c) okres ruchu harmonicznego klocka. d) Wyznacz maksymalną energię kinetyczną jaką osiąga klocek w czasie drgań.
- Gdy do końca pewnej sprężyny przymocowano klocek o masie m , jego drgania miały okres 2 s , a gdy masę klocka zwiększono o 2 kg , okres drgań był równy 3 s . Oblicz wartość m .
- Na sprężynie zawieszono klocek o masie 2 kg . Gdy do klocka przymocowano ciało o masie 300 g , wydłużenie sprężyny wzrosło o 2 cm . a) Ile wynosi stała sprężystości sprężyny? b) Ile wynosi okres drgań układu po usunięciu ciała o masie 300 g ?

11. Klocek zawieszono na sprężynie o stałej sprężystości k , która w wyniku tego wydłużyła się o h w stosunku do jej długości bez obciążenia. Wykaż, że jeśli wprawimy klocek w drgania harmoniczne, to ich częstość będzie taka sama jak częstość drgań wahadła matematycznego o długości h .
12. Pewien pulsar, czyli gwiazda, która po zapadnięciu się ma olbrzymią gęstość, ma masę M równą masie Słońca (czyli $1.98 \cdot 10^{30}$ kg), a promień wynoszący zaledwie 12 km. Okres obrotu tego pulsara T jest równy 0.041 s. Ile wynosi różnica przyspieszenia swobodnego spadku g i przyspieszenia grawitacyjnego a_g na równiku tej gwiazdy? Podaj wynik jako zmianę wyrażoną w procentach. Odp. 0.031%.
13. Satelita krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej na wysokości h równej 230 km nad powierzchnią Ziemi i ma okres obiegu T równy 89 min. Oblicz z tych danych masę Ziemi. Odp. $6 \cdot 10^{24}$ kg.
14. Cząstkę o masie m przeniesiono z punktu znajdującego się praktycznie w nieskończoności do środka pierścienia o masie M i promieniu r . Jak zmieniała się w trakcie ruchu cząstki siła grawitacyjna działająca na nią ze strony pierścienia?
15. Wykaż, że przyspieszenie grawitacyjne a_g na dnie wydrążonego w Ziemi pionowego szybu o głębokości D wynosi:

$$a_g = a_{gp} \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

gdzie a_{gp} jest przyspieszeniem grawitacyjnym na powierzchni Ziemi. Przyjmij, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu R .

16. Z powierzchni planety o masie M i promieniu R wystrzelono pionowo w górę pocisk z prędkością o wartości $(GM/R)^{1/2}$. Korzystając z zasady zachowania energii, wyznacz maksymalną odległość od środka planety, na jaką wzniesie się ten pocisk. Podaj wynik w jednostkach R .
17. Gwiazda neutronowa może mieć masę równą masie Słońca a promień zaledwie 10 km. a) Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni takiej gwiazdy? b) Ile wynosi prędkość ciała, które spadło na takiej gwiazdzie z wysokości 1 m, przy czym zostało puszczone bez prędkości początkowej? Przyjmij, że gwiazda nie wykonuje ruchu obrotowego.
18. a) Wyznacz prędkość ucieczki od Słońca ciała znajdującego się na orbicie Ziemi (tzn. odległego od Słońca o promień orbity Ziemi R), daleko od Ziemi. b) Jeśli ciało ma już prędkość równą prędkości Ziemi w ruchu po orbicie, to o ile należy jeszcze zwiększyć jego prędkość, aby uciekło od Słońca jak w punkcie (a)? c) Wyobraź sobie, że ciało wystrzelono z Ziemi w kierunku ruchu Ziemi po orbicie. Ile wynosi prędkość, z jaką trzeba je wystrzelić, aby daleko od Ziemi miało ono jeszcze prędkość obliczoną w punkcie (b), która umożliwia mu ucieczkę od Słońca? (Jest to prędkość, którą trzeba nadać pociskom wystrzelonym z Ziemi, aby mogły uciec od Słońca).
19. Wykaż, że prędkość ucieczki od Słońca ciała znajdującego się w takiej samej odległości od Słońca jak Ziemia jest $\sqrt{2}$ razy większa od prędkości Ziemi w jej ruchu po orbicie, o której zakładamy, że jest kołowa.
20. Ciało o masie M wyglądające jak kula o promieniu a jest w rzeczywistości powłoką kulistą o promieniu wewnętrznym b , jak pokazano na rysunku. Rozważ siłę grawitacyjną, jaką działa to ciało na cząstkę o masie m umieszczoną w odległości r od środka ciała. a) Naskicuj krzywą przedstawiającą zależność wartości F tej siły od r dla $0 \leq r \leq \infty$. Zwróć uwagę na punkty $r = 0, b, a$ i ∞ . b) Naskicuj krzywą $E_p(r)$ pokazującą, jak zależy od r energia potencjalna układu ciało-cząstka.

