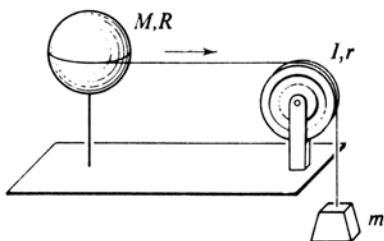


Dynamika ruchu obrotowego układów punktów materialnych.

1. (a) Mając dane  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$  i  $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$  znaleźć moment siły  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . (b) Pokazać, że jeżeli  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$  leżą w tej samej płaszczyźnie, to  $\vec{\tau}$  nie ma składowych w tej płaszczyźnie.

Odp.: (a)  $\vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x)$ .

2. Pokazać, że moment pędu pojedynczego punktu materialnego względem dowolnego punktu poruszającego się ze stałą prędkością pozostaje stały podczas ruchu.
3. Przypuśćmy, że Ziemia ma kształt kuli o jednorodnej gęstości. (a) Jaka jest energia kinetyczna ruchu obrotowego? Przyjąć, że promień Ziemi jest równy  $6.4 \cdot 10^3$  km, a jej masa  $6 \cdot 10^{24}$  kg. (b) Przypuśćmy, że energia ta jest możliwa do wykorzystania dla potrzeb ludzi. Jak długo może Ziemia dostarczać każdemu człowiekowi 1 kW mocy, jeżeli ilość ludzi jest równa  $4.2 \cdot 10^9$ ?
- Odp.:  $2.6 \cdot 10^{29}$  J; (b)  $2 \cdot 10^9$  lat.
4. Jednorodna powierzchnia kulista obraca się względem pionowej osi bez tarcia, patrz rysunek. Cienki sznurek opasuje równik owej powierzchni, następnie przepuszczany jest przez blok i połączony z małym przedmiotem, który nie podtrzymywany przez sznurek spadłby pod wpływem przyciągania ziemskiego. Jaką prędkość osiągnąłby przedmiot, gdyby spadł z wysokości  $h$ , mając zerową prędkość początkową?



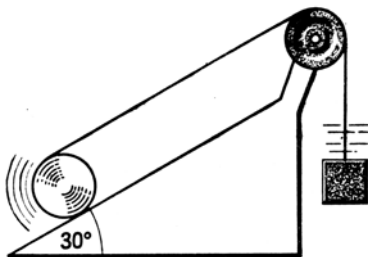
5. Ciało o promieniu  $R$  i masie  $m$  toczy się poziomo bez poślizgu z prędkością  $v$ . Ciało to następnie wtacza się po powierzchni wznoszącej na wysokość  $h$ . Jeżeli  $h = \frac{3v^2}{4g}$ , to (a) jaki jest moment bezwładności ciała, (b) co to mogło być za ciało?

Odp.: (a)  $\frac{1}{2}mR^2$ ; (b) sztywna kołowa obręcz.

6. Na walcu o masie  $M$  i promieniu  $R$  nawinięta jest linka. Linka jest ciągnięta do góry i odwija się z walca z taką prędkością, że środek ciężkości walca nie zmienia swego położenia. (a) Jakie jest napięcie linki? (b) Jaka praca została wykonana nad walcem do chwili, gdy osiągnął on prędkość kątową  $\omega$ ? (c) Jaka długość linki odwinęła się do tego czasu.

7. Lekką, cienką taśmę nawinięto na pełny cylinder o ciężarze 23 kg i promieniu 7.6 cm. Taśma jest przerzucona przez lekki, gładki, nieruchomy blok, przytwierdzony u szczytu równi. Na drugim końcu taśmy zamieszczono pionowo ciężar 4.5 kG, patrz rysunek. Gdy płaszczyzna, po której porusza się cylinder, jest nachylona pod kątem  $30^\circ$  do płaszczyzny poziomej, znaleźć: (a) liniowe przyspieszenie cylindra w dół równi pochyłej, (b) naprężenie taśmy przyjmując, że nie ma poślizgu.

Odp.: (a)  $0.47 \text{ m/s}^2$ ; (b) 48 N.



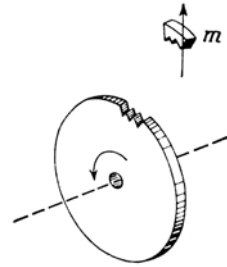
8. Na obracającej się bez tarcia, z prędkością kątową 1 obr/s (Hz) platformie stoi człowiek. Ma on ramiona wyciągnięte w bok i w każdej ręce trzyma ciężarek. W tej pozycji całkowity moment bezwładności człowieka i platformy wynosi  $6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Jeżeli z chwilą przyciągnięcia ciężarek do siebie człowiek zmniejszy ogólny moment bezwładności do  $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , to : (a) jaka będzie prędkość kątowa platformy? (b) o ile zwiększy się jej energia kinetyczna?

Odp.: (a) 3 Hz; (b) o czynnik 3.

9. Koło obraca się z prędkością kątową 800 obr/min na drążku, którego moment bezwładności można pominąć. Drążek ten został obciążony drugim kołem, początkowo nieruchomym, o dwukrotnie większym momencie bezwładności od koła pierwszego. (a) Jaka jest prędkość kątowa układu złożonego z drążka i dwóch kół? (b) Rozważyć zmiany zachodzące w ilości obrotowej energii kinetycznej w tym układzie.

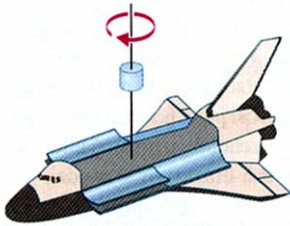
Odp. (a) 267 obr/min; (b) Układ traci dwie trzecie swej energii kinetycznej.

10. Jednorodny płaski krążek o masie  $M$  i promieniu  $R$  obraca się z prędkością kątową  $\omega_0$  wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek. (a) Jaki jest jego moment pędu? (b) Kawałek krążka o masie  $m$  odłamuje się od jego brzegu tak, że odlatuje w kierunku pionowym od punktu, z którego się odłamał, patrz rysunek. Jak wysoko nad tym punktem uniesie się ten kawałek? (c) Jaka jest końcowa prędkość kątowa pękniętego krążka? Jaki jest jego końcowy moment pędu i jaka energia?



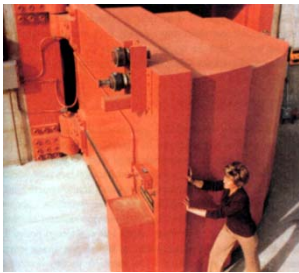
Odp.: (a)  $MR^2\omega_0^2/4$ ,  $MR^2\omega_0/2$ ; (b)  $R^2\omega_0^2/g$ ; (c)  $\omega_0$ ,  $(\frac{M}{2} - m)R^2\omega_0$ ,  $(\frac{M}{2} - m)R^2\omega_0^2/2$ .

11. Oblicz moment bezwładności koła, które ma energię kinetyczną równą 24400 J, gdy obraca się z prędkością kątową 602 obrotów/min.
12. Cząsteczka tlenu  $O_2$  ma masę  $5,3 \cdot 10^{-26}$  kg, a jej moment bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek odcinka łączącego atomy tlenu i prostopadłej do tego odcinka, wynosi  $1,94 \cdot 10^{-46}$  kg·m<sup>2</sup>. Przyjmij, że środek masy cząsteczki  $O_2$  ma w gazie prędkość ruchu postępowego równą 500 m/s, oraz że energia kinetyczna ruchu obrotowego cząsteczki stanowi  $\frac{2}{3}$  energii kinetycznej ruchu postępowego jej środka masy. Ile wynosi prędkość kątowa obrotu cząsteczki wokół osi przechodzącej przez jej środek masy?
13. Satelita komunikacyjny o masie 1210 kg ma kształt walca o średnicy podstawy 1,21 m i wysokość 1,75 m. Przed wyrzeleniem go z pokładu wahadłowca wprawia się go w ruch obrotowy wokół osi walca, z prędkością kątową 1,52 obrotów/s (patrz rysunek). Oblicz a) moment bezwładności satelity względem jego osi obrotu, b) energię kinetyczną jego ruchu obrotowego.

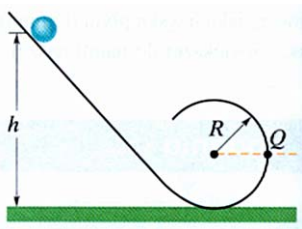


14. Niewielką kulkę o masie 0,75 kg przymocowano do końca pręta o długości 1,25 m i znikomo małej masie, a drugi koniec pręta zawieszono na osi. Wyznacz moment siły, działający na utworzone w ten sposób wahadło, gdy jest ono odchylone od pionu o kąt 30°.
15. Na rysunku pokazano najcięższe na świecie drzwi na zawiasach, którymi są stanowiące osłonę przed promieniowaniem drzwi do Sali badań neutronowych w ośrodku Lawrence Livermore Laboratory. Mają one masę 44000 kg, ich moment bezwładności względem osi zawiasów wynosi  $8,7 \cdot 10^4$  kg·m<sup>2</sup>, a ich szerokość jest równa 2,4 m. Jaką stałą siłą, przyłożoną do zewnętrznej framugi i prostopadłą do płaszczyzny drzwi, trzeba na nie

działać aby obrócić je o kąt  $90^\circ$  w ciągu 30 s? Pomiń tarcie i załóż, że drzwi pozostają początkowo w spoczynku.



16. Koła samochodu jadącego z prędkością 80 km/h mają średnicę 75 cm. a) Ile wynosi prędkość kątowna kół względem ich osi. Samochód ten hamuje następnie jednostajnie, bez poślizgu aż do zatrzymania się, przy czym koła wykonują 30 pełnych obrotów. b) Jaką wartość ma przyspieszenie kątowne kół? c) Jaką drogę przebywa samochód w czasie hamowania?
17. Samochód o masie 1000 kg ma cztery koła o masie 10 kg każde. Jaki ułamek całkowitej energii kinetycznej pojazdu stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego kół wokół ich osi? Przyjmij, że koła mają taki sam moment bezwładności, jak jednorodne krążki o takiej samej jak one masie i średnicy. Dlaczego wynik nie zależy od promienia kół?
18. Mała kulka kamienna o masie  $m$  i promieniu  $r$  stacza się bez poślizgu po torze, zakończonym pętlą, pokazanym na rysunku. Kulka została puszczone swobodnie bez prędkości początkowej w pewnym punkcie prostoliniowego odcinka toru. a) Chcemy, aby kulka dotarła do najwyższego punktu pętli. Z jakiej co najmniej wysokości  $h$  nad najniższym punktem toru należy ją puścić? Przyjmij, że promień pętli  $R \gg r$ . b) Oblicz składową poziomą siłę działającą w punkcie  $Q$  na kulkę puszczone z punktu na wysokości  $6R$  nad najniższym punktem toru.



19. Zabawka jo-jo ma masę 120 g i moment bezwładności  $950 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ . Promień ośki jest równy 3,2 mm, a sznurek ma długość 120 cm. Puszczamy jo-jo z prędkością początkową równą zero i kółko zjeżdża po sznurku aż do najniższego położenia. a) Ile wynosi wartość przyspieszenia liniowego kółka? b) Ile czasu trwa ruch kółka do dolnego końca sznurka? Ile wynosi: c) prędkość liniowa, d) energia kinetyczna ruchu postępowego, e) energia kinetyczna ruchu obrotowego oraz f) prędkość kątowna kółka w chwili, gdy dociera ono do dolnego końca sznurka?
20. Karaluch o masie  $m$  biegnie wzdłuż brzegu stojącej na stole tacy obrotowej o promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I$ , która może obracać się na łożyskach bez tarcia, wokół pionowej osi. Prędkość karalucha względem stołu wynosi  $v$ , a taca obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, z prędkością kątowną  $\omega_0$ . W pewnej chwili karaluch dostrzega na swej drodze okrusek chleba i – rzecz jasna – zatrzymuje się przy nim. a) Ile wynosi prędkość kątowna tacy po zatrzymaniu się karalucha? b) Czy energia mechaniczna jest zachowana podczas tego manewru?