- Wektory. Proszę powtórzyć rachunek wektorów wg. tekstu *wektory.pdf* (patrz: „abecadło matematyczne początkującego fizyka" na stronie www), ew. Halliday, Resnick, Walker, t.1.
- Wielkości kinematyczne (prędkość, przyspieszenie) w ruchu prostoliniowym i krzywoliniowym
- opis ruchu w kartezjańskim układzie współrzędnych

1. Dane sa dwa wektory: $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\hat{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$. Obliczyć: a) długość każdego wektora, b) iloczyn skalarny, c) kąt pomiędzy wektorami, d) sumę i różnicę, e) iloczyn wektorowy, f) rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek $\vec{b}$ i odwrotnie - rzut $\vec{b}$ na $\vec{a}$, e) wartość wyrażenia $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}$, dla dowolnego $\vec{c}$.

2. (Resnick,Halliday,Walker; t.1,rozdz.4,zad.2) Wektor położenia elektronu wynosi: $\vec{r_1} = (5m)\hat{\imath} - (3m)\hat{\jmath} + (2m)\hat{k}$. a) Wyznacz długość wektora $\vec{r}$. Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych.

3. (RHW1,r.4,zad.3) Wektor położenia protonu (w metrach) wynosi początkowo: $\vec{r}_1 = 5\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, a w chwli późniejszej $\vec{r}_2 = -2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$. a) znajdź wektor przemieszczenia protonu. b) Pod jakim kątem jest on nachylony do płaszczyzny xy? (odp. b: 16.1^o)
   Uwaga: znajdź błąd w odpowiedzi podręcznikowej.

4. Nadobowiązkowe: Zastosować rachunek wektorowy do wykazania wzorów:
$$\sum_{k=0}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} sin\frac{2k\pi}{n} = 0 \ .$$
   Wskazówka: dla n wektorów o jednakowej długości, leżących na płaszczyźnie – rozpatrzyć ich sumę i rzuty na prostopadłe osie. Wektory są takie, że każdy z nich tworzy z poprzedzającym kąt $\frac{2\pi}{n}$, początek wektora umieść w końcu poprzedzającego.

5. Krawędzie równoległościanu wyznaczone sa przez wektory $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{\jmath}$, $\vec{c} = \hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Znaleźć powierzchnię oraz objętość równoległościanu, posługując się własnościami iloczynow wektorów.

6. Oblicz:
   a) średnią prędkość samochodu, który przejeżdża odcinek $x_1 = 20$ km z prędkością $v_1 = 40$ km/h, a przez następne $x_2 = 20$ km jedzie z prędkością $v_2 = 80$ km/h;
   b) prędkość średnią oraz prędkość chwilową w 8-ej sekundzie ruchu pojazdu hamującego jednostajnie na odcinku 100 m, na którym to odcinku pojazd zmniejsza prędkość od 72 km/h do zera.

7. Ruch cząstki odbywa się wzdłuż osi x w taki sposób, że współrzędna położenia x w poszczególnych chwilach t opisana jest zależnością $x(t) = At^3$, gdzie stała A wynosi 0.01 m/s^3. Stosując definicję prędkości chwilowej
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
   znajdź wzór na prędkość w dowolnej chwili t i oblicz tę prędkość w chwili $t = 10$ s. (Wskaz: przyrost drogi Δx to $x(t + \Delta t) - x(t) = A(t + \Delta t)^3 - At^3$; odp: 3 m/s)

8. Cząstka ma w pewnej chwili prędkość (w m/s) $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$, a w cztery sekundy później $\vec{v} = -2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$. Wyznacz przyspieszenie średnie $\vec{a}_{\text{śr}}$ cząstki w czasie tych 4 s, wyrażone: a) za pomocą wektorów jednostkowych, b) przez jego długość i kierunek (w tym przypadku przez kierunek rozumiemy podanie dwóch kątów: ϑ - pomiędzy wektorem $\vec{a}_{\text{sr}}$ a osią z, φ - pomiędzy osią x a rzutem wektora $\vec{a}_{\text{sr}}$ na płaszczyznę xy).

9. Ciało wyrzucono pod katem $\alpha = 45^o$ do poziomu, z prędkością początkową $v = 20\ \frac{m}{s}$. Po jakim czasie wektor prędkości ciała utworzy z poziomem kąt $\beta = 30^o$?
   (zastosuj znane wzory opisujące rzut ukośny)

10. Sztywna obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Płaszczyzna koła jest pionowa, a jego oś przesuwa się poziomo z prędkością v (stałą) względem powierzchni. Tor punktu A, który w chwili początkowej miał współrzędne (0, 2R) przedstawia wektor wodzący:

$$\vec{r}(t) = (vt + R\ sin\frac{vt}{R})\hat{i} + (R + R\ cos\frac{vt}{r})\hat{j}.$$

a) Naszkicuj ten tor w układzie (x, y). b) Uzasadnij powyższy wzór. c) b) Znajdź wektory prędkości i przyspieszenia punktu A (poprzez różniczkowanie wektora wodzącego $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$).

11. Położenie cząstki poruszającej sie wzdluż osi x, jest opisane następującym równaniem: $x = A+Bt+Ct^3$, gdzie x i t są wyrażone w jednostkach układu SI, a wartości stałych A, B, C są rowne odpowiednio: $8, 0, -2$. a) Jakie wymiary muszą mieć stałe współczynniki A, B, C w równaniu? b) Oblicz prędkość i przyspieszenie cząstki w chwili $t = 3.5$ s. c) Ile wynosi droga przebyta przez cząstkę w czasie $t = 3.5$ s (licząc od chwili $t = 0$), a ile przemieszczenie? d) Sporządź wykresy funkcji $x(t)$ i $v(t)$ i przy ich pomocy zinterpretuj wyniki uzyskane w poprzednich punktach.

12. Prędkość cząstki poruszającej się po linii prostej zmienia się następująco: $v(t) = 9 - 6t^2$ [m/s]. a) Jak wyraża się współrzędna położenia cząstki w funkcji czasu t jeśli wiadomo, że w chwili początkowej (dla $t = 0$) znajdowała się ona w odległości 3 m od początku układu współrzędnych. b) Oblicz drogę przebytą pomiędzy $t_1 = 0.5$ s i $t_2 = 1$ s. (wskaz: całkowanie).

13. Wykresy.
Zależność energii potencjalnej układu dwóch cząstek odległych od siebie o r wyraża się wzorem

$$E_p(r) = \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4},$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi. Przedstaw na wykresie zależność E_p w funkcji r.
(Wskaz.: Odpowiedź znajdziesz w zakładce "abecadło matematyczne...", plik *pochodne.pdf*).

14. Zadanie nadobowiązkowe: Chcesz dostać się w możliwie najkrótszym czasie do punktu położonego na przeciwległym brzegu rzeki, mającej szerokość 500 m, dokładnie na wprost miejsca, w którym aktualnie stoisz. Prędkość nurtu rzeki wynosi 2 km/h. Masz do wyboru kombinację płyniecia łodzią z prędkością (na nieruchomej wodzie) równą 3 km/h, a następnie marszu wzdłuż brzegu z prędkością 5 km/h. a) Pod jakim kątem α względem nurtu rzeki skierujesz łódź aby czas był minimalny? b) Ile czasu zajmie ci wtedy przebycie całej drogi?