Informatyka Ir., obie grupy 24 marca 2017 **(4)**

• Rownania ruchu w układach inercjalnych i nieinercjalnych; • praca przy przemieszczaniu w polu sił; • zachowawcze pole sił; • energia potencjalna

Zadania na pierwszy termin:

1. Siły grawitacji. a) Znając $g = 9.81$ m/s^2 na powierzchni Ziemi oblicz na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi przyspieszenie grawitacyjne wynosi 4.9 m/s^2 . b) Zakładając że gęstość Ziemi jest w przybliżeniu stała, oblicz w jakiej odległości r od środka Ziemi przyspieszenie grawitacyjne wynosi 4.9 m/s^2 (przyjmij bez dowodu, że cała masa znajdująca się w odległoś $> r$ nie wpływa na wynik). c) Sporządź wykres $g(r)$ dla $r \geqslant R$ i $r \leqslant R$ (R -promień Ziemi).

2. Pasaęr windy wjeżdżającej w górę ze stałym przyspieszeniem 0.5 m/s^2 upuścił w pewnym momencie monetę. Zapisz równania ruchu spadającej monety: a) w układzie inercjalnym, z punktu widzenia obserwatora będącego na Ziemi, b) w układzie nieinercjalnym związanym z windą.

3. Na równi pochyłej o kącie nachylenia 30^o umieszczony jest klocek o masie 120 g. Z jakim minimalnym przyspieszeniem należy przesuwać poziomo równię aby klocek nie poruszał się względem niej, jeśli a) tarcie między równią a klockiem nie występuje, b) współczynnik tarcia wynosi 0.4.

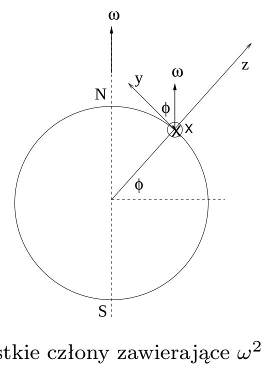
4. Motocyklista jedzie z prędkością $36\frac{km}{h}$ po okręgu. Jaki jest najmniejszy promień okręgu, po którym może jechac bez wywrotki, jeśli wspołczynnik tarcia $\mu = 0.4$? Pod jakim kątem musi sie odchylić?

5. Z najwyższego punktu na powierzchni kuli o promieniu R ześlizguje się bez tarcia punktowa masa m. W którym miejscu i z jaką prędkością oderwie się ona od kuli? Przyjąć prędkość początkową równą zero.

6. Spadek swobodny z uwzględnieniem siły Coriolisa. Oblicz odchylenie od pionu (wartość i zwrot) w momencie upadku na Ziemię, jeśli ciało spada (bez prędkości początkowej) z wysokości 10 km. Przyjąć szerokość geograficzną φ dla Krakowa.
Układ odniesienia spoczywający na powierzchni Ziemi nie jest, ściśle biorąc, układem inercjalnym ze względu na obrót Ziemi wokół swojej osi. Siły bezwładności, jakie należy mieć tu na uwadze to siła Coriolisa $\vec{F_c} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ i siła odśrodkowa $\vec{F_o} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$. Obie są niewielkie w porównaniu do siły ciężkości, ale ta druga jest najmniej istotna i można ją zaniedbać (zależy od ω^2 i na równiku jest ok. 300 razy mniejsza niż siła ciężkości).
Proszę prześledzić poniższe wskazówki i dokonać końcowych obliczeń.

Przyjmiemy układ współrzędnych na szerokości geograficznej φ: $z-$ oś - pionowa, x- równoleżnikowo na wschód, $y-$ południkowo na północ (rys.).

Ruch odbywa się bez prędkości początkowej, $\vec{v}_o = (0, 0, 0)$, przy położeniu początkowym $\vec{r}_o = (0, 0, z_o)$. Prędkość kątowa obrotu Ziemi: $\vec{\omega} = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$, położenie i prędkość w chwili t: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, siła grawitacji: $\vec{F} = m\vec{g} = m(0, 0, -g)$.



• Równanie ruchu wygląda następująco: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$.

(1) pokaż, że to równanie ruchu sprowadza się do układu
$\dot{v}_x = 2\omega(\sin\varphi\, v_y - \cos\varphi\, v_z)$
$\dot{v}_y = -2\omega\sin\varphi\, v_x$
$\dot{v}_z = -g + 2\omega\cos\varphi\, v_x$

(2) scałkuj po czasie w/w w zakresie 0 do t, powinieneś otrzymać:
$v_x = 2\omega(\sin\varphi\, y - \cos\varphi\,(z - z_o))$
$v_y = -2\omega\sin\varphi\, x$
$v_z = -gt + 2\omega\cos\varphi\, x$

(3) wstaw w/w do wyjściowego układu i posługując się warunkiem $\omega^2 << \omega$ zaniedbaj wszystkie człony zawierające ω^2; układ równań upraszcza się:
$\dot{v}_x = 2\omega\cos\varphi\, gt$
$\dot{v}_y = 0$
$\dot{v}_z = -g$

(4) scałkuj po czasie dwukrotnie aby uzyskać szukane położenia spadającego ciała w funkcji czasu $x)t), y(t), z(t)$

(5) oblicz odchylenie od pionu x w momencie upadku na Ziemię, jeśli ciało spada z wysokości 10 km, przyjmij szerokość geograficzną φ dla Krakowa, podaj zwrot tego odchylenia.

Proszę całe rozwiązanie tego zadania opisać na osobnej kartce i oddać na ćwiczeniach.

7. Znaleźć prędkość wody w rzece, płynącej na północnej półkuli w kierunku zgodnym z południkiem, jeśli na tej szerokości geograficznej ($\phi = 60^o$) każdy metr sześcienny wody działa na wschodni brzeg tej rzeki siłą bezwładności Coriolisa równą $F = 0.1\ N$. Przyjąć gęstość wody za znaną. W którym kierunku, na północ czy nas południe płynie rzeka?

8. Pokaż, że elementy różniczkowe powierzchni dS sfery o promieniu r i kąta bryłowego $d\Omega$ wynoszą w układzie sferycznym odpowiednio:
$$dS = r^2 \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$
$$d\Omega = \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$
Korzystając z powyższych wzorów (całkując) pokaż, że powierzchnia sfery wyraża się wzorem $S = 4\pi r^2$, a pełny kąt bryłowy $\Omega = 4\pi$.

Zadania na drugi termin:

1. Na poziomym stole spoczywa łańcuch o masie M i długosci L_o . Jego część o długości L zwisa swobodnie ze stołu. Do łańcucha przyłożono poziomą siłę, która powoli wciągnęła cały łańcuch na stół. Jaka praca została wykonana jeśli współczynnik tarcia wynosi μ?

2. Obliczyć pracę jaką wykonamy rozciągając sprężynę (powoli, aby równoważyć w każdym momencie siłę sprężystości równą $F = -kx$, x – odległość od położenia równowagi) o 10 cm od położenia równowagi. Współczynnik sprężystości $k = 350$ N/m. Jaką pracę wykona siła sprężystości? Jaką energię potencjalną uzyska sprężyna?

3. Które z następujących sił są siłami zachowawczymi, a które niezachowawczymi: siły w ruchu harmonicznym prostym, siły tarcia, siły grawitacyjne, siły kulombowskie. Jak to sprawdzic? Czy dla pola niezachowawczego można określić energię potencjalną?

4. Dla pola sił określonego następująco: $F_x = Axy,\ F_y = B(x^2 - y^2)$, gdzie A, B - stałe, określić dla jakich A, B jest ono zachowawcze. Dla tego przypadku obliczyć energię potencjalną $E_p(x, y)$.

5. Pole grawitacyjne: $\vec{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = m\,\vec{g}(r)\hat{r}$.
Masa M (przyjmijmy, że jest punktowa) wytwarza pole grawitacyjne. Pokaż, że po to aby przemieścić wolno masę m z punktu nieskończenie odległego od M do punktu odległego od niej o r musimy wykonać pracę $-G\frac{Mm}{r}$. Ta praca to zmiana energii potencjalnej $\Delta E_p = E_p(r) - E_P(\infty)$ masy m. Wygodnie przyjąć $E_p(\infty) = 0$, wtedy $E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}$. Proszę narysować wykres $E_p(r)$.

6. Znaleźć wzór na energię potencjalną masy m znajdującej się w polu grawitacyjnym, wytworzonym przez kulistą masę M (o promieniu R i stałej gęstości), w odległości r od jej środka, dla $r > R$ oraz $r < R$. Ile wynosi ta energia w punkcie $r = 0$? Sporządzić wykres $E_p(r)$.

7. Gdyby przez środek Ziemi wydrążono tunel, to z jaką prędkością przedmiot wrzucony doń minąłby środek Ziemi? Pokazać, że taki ruch byłby ruchem harmonicznym. Znaleźć okres tego ruchu.

8. Pokaż, że szkolny wzór na zmianę energii potencjalnej w polu siły ciężkości $\Delta E_p = mgh$ wynika z ogólniejszego wzoru wyprowadzonego wyżej jeśli h jest dużo mniejsze od promienia Ziemi.

9. Na Ziemi lekkoatleta skacze o tyczce na wysokość 5 m. Jaki promień musiałaby mieć planeta, na której skoczek wykonując tę samą pracę co na Ziemi, oderwałby się od planety i poszybował w przestrzeń bezpowrotnie? Gęstości Ziemi i planety przyjąć jednakowe.

10. (Zadanie nadobowiązkowe.) Obliczyć czas wypływu cieczy nielepkiej i nieściśliwej ze stożkowego lejka przez otwór o promieniu n-krotnie mniejszym niż promień powierzchni cieczy w chwili t=0. Założyć, że $n \gg 1$. Początkowa wysokość słupa cieczy wynosi H.

Wskaz.: korzystając z prawa zachowania energii ułożyć równanie opisujace prędkość obniżania się poziomu cieczy.