

- drgania harmoniczne, drgania harmoniczne tłumione, drgania wymuszone

1. Do sprężyny zamocowanej na jednym końcu i powieszony pionowo podczepiono odważnik 10 kg, w wyniku czego sprężyna rozciągnęła się o 15 cm. Następnie wprowadzono odważnik w ruch drgający (pionowo). Znajdź okres drgań.
2. Jeśli okładki naładowanego kondensatora zewrzeć przy pomocy cewki, to w takim zamkniętym obwodzie popłynie prąd, kondensator zacznie się rozładowywać, jego ładunek  $q(t)$  zmienia się. Prawo Kirchoffa pozwala napisać równanie, które wiąże  $q(t)$  z natężeniem prądu  $i(t)$  płynącego w chwili  $t$  przez cewkę:  $L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$ . Stała  $L$  (indukcyjność cewki) i pojemność kondensatora  $C$  to są oczywiście wielkości nie zmieniające się w czasie. Natężenie prądu  $i$  oraz ładunek  $q$  wiąże relacja:  $i = \frac{dq}{dt}$ . Pokaż, że równanie, które opisuje taki obwód  $LC$  jest równaniem drgań harmonicznyc. Znajdź  $q(t)$ ,  $i(t)$  oraz podaj wzór na okres  $T$  drgań.
3. **Ruch drgający tłumiony.** Ruch drgający masy  $m$  (np. przyczepionej do sprężyny) odbywa się w ośrodku, w którym występuje siła oporu (np. opór powietrza) proporcjonalna do do prędkości drgającej masy,  $F_t = bv$ , gdzie  $b$  jest współczynnikiem oporu. Pokaż, że ruch ten opisuje równanie:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = 0.$$

Stałą  $\beta = b/2m$  nazywamy współczynnikiem tłumienia, a  $\omega_o = \sqrt{k/m}$  - częstością drgań własnych, tj. takich drgań, kiedy nie występuje tłumienie. Proszę prześledzić rozwiązanie tego równania w "abecadło... równania różniczkowe" i pokazać, że gdy tłumienie nie jest za wielkie ( $\beta < \omega_o$ ) to:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \text{ gdzie } \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}.$$

Amplituda drgań  $Ae^{-\beta t}$  maleje w czasie. Naszkicuj wykres  $x(t)$  (załóż  $\varphi = 0$ ).

4. Po upływie czasu  $t = 15$  s amplituda drgań kamertonu zmniejszyła się 100 razy. Znaleźć współczynnik tłumienia drgań.
5. Kulka o masie  $m = 100$  g zawieszona na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości  $k_1 = 0.1$  N/m wykonuje drgania w ośrodku o współczynniku tłumienia  $\beta = 0.01$  1/s. Jaką sprężynę (o jakim współczynniku sprężystości  $k_2$ ) i jak (szeregowo, równoległe?) należy dołączyć aby drgania nie mogły zachodzić w danym ośrodku?
6. **Ruch harmoniczny tłumiony z wymuszeniem.** Ułożyć równanie drgań harmonicznyc (np. sprężyna, wahadło) z uwzględnieniem tłumienia i zakładając, że obecna jest siła wymuszająca, zmieniająca się sinusoidalnie,  $F = F_o \cos \omega t$ :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = f_o \cos \omega t, \text{ gdzie } f_o = F_o/m.$$

Prześledzić rozwiązanie równania w "abecadło... równania różniczkowe". W szczególności pokazać, że:

a) amplituda drgań (rozumiana jako maksymalne wychylenie od położenia równowagi) jest funkcją  $\omega$  i wyraża się wzorem:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

b) przesunięcie fazowe względem siły wymuszającej określa wzór:  $\tan \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$ .

c) rezonans, czyli maksimum amplitudy uzyskuje się gdy częstość wymuszająca  $\omega$  spełnia warunek:

$$\omega = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}.$$

7. Znaleźć amplitudę drgań wymuszonych ciężarka o masie 0.2 kg, zawieszono na lekkiej sprężynie o współczynniku sprężystości 10 N/m, jeśli sinusoidalna siła wymuszająca ma amplitudę 2 N i częstość dwa razy większą od częstości drgań własnych ciężarka, a współczynnik tłumienia jest równy 0.5 1/s. Ilorotnie obliczona amplituda jest mniejsza od amplitudy uzyskiwanej dla częstości rezonansowej?
8. Przyjmij wartość częstości drgań własnych  $\omega_o = 10$ , amplitudę natężenia siły wymuszającej  $f_o = 100$ . Rozpatrz drgania wymuszone w ośrodkach o współczynniku tłumienia: a)  $\beta = 0.1$ , b)  $\beta = 1$ . Wszystkie wielkości podane wyżej są wyrażone w jednostkach układu SI.

Dla obu przypadków wykonaj obliczenia numeryczne funkcji  $A(\omega)$  w przedziale  $(0, 5\omega_o)$  (w kilkudziesięciu punktach, zagęść w okolicy  $\omega_{rez}$ ) i narysuj możliwie dokładne wykresy  $A(\omega)$  (są to tzw. krzywe rezonansowe).

**To zadanie proszę zapisać i oddać na ćwiczeniach.**