ABC matematyki dla początkujących fizyków.

1. Pochodna

■ ciągłość, granica funkcji ■ iloraz różnicowy ■ definicja pochodnej ■ graficzna interpretacja pochodnej ■ wzory różniczkowania: suma, iloczyn, iloraz; pochodna funkcji złożonej; pochodne funkcji elementarnych ■ pochodna funkcji wektorowej ■ pochodne wyższych rzędów ■ funkcje wielu zmiennych, pochodne cząstkowe

2. Różniczki

■ różniczka zmiennej niezależnej ■ różniczka funkcji jednej zmiennej ■ różniczka funkcji wielu zmiennych ■ elementy różniczkowe: długości, powierzchni, objętości, kąta bryłowego w różnych układach współrzędnych

3. Niektóre zastosowania pochodnych

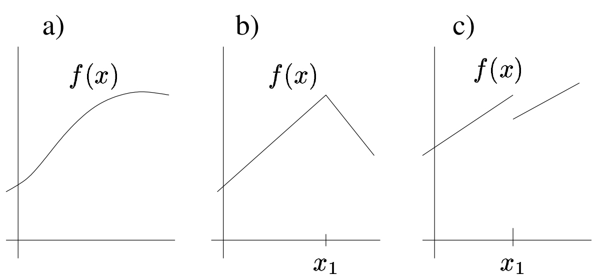
■ obliczanie granic funkcji – reguła de l'Hospitala ■ szereg Taylora w zastosowaniu do przybliżeń ■ ekstrema funkcji ■ wykresy

(przeczytaj, nawet jeśli uczyłeś się o pochodnych)

1 Pochodna

1.1 Ciągłość, granica funkcji

Poniżej na rysunku pokazane są wykresy trzech funkcji.



Funkcja jest ciągła w pierwszych dwóch przypadkach, ale o ile w przypadku a) pochodna istnieje w całym zakresie zmienności funkcji, to w przypadku b) nie ma pochodnej w x_1. W przypadku c) funkcja jest nieciągła w x_1 i w tym punkcie pochodna nie istnieje.

1.2 Definicja pochodnej

Potrzebę wprowadzenia pochodnej objaśnimy na przykładzie fizycznej wielkości: prędkości v. Rozpatrzmy ruch po linii prostej aby nie trzeba bylo posługiwać się wektorami. Prędkość dla poszczególnych chwil może być różna, a więc jest to funkcja czasu $v(t)$.

Zwykle, aby ocenić prędkość, dzielimy odcinek drogi Δs przez odstęp czasu Δt, w którym droga została przebyta i w ten sposób otrzymujemy średnią prędkość

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Im krótszy Δt (i oczywiście mniejsze Δs) tym lepiej określimy prędkość w danej chwili ruchu, czyli tzw. prędkość chwilową. Co to znaczy "im krótszy"? Możemy skracać odstęp czasu i z Δt zmierzać do zera, dopiero taka granica będzie dokładną miarą prędkości w danej chwili t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Taka granica ilorazu różnicowego $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ to właśnie jest pochodna funkcji $s(t)$ (zauważ, że droga jest funkcją czasu). Jak ją obliczać praktycznie – dowiemy się nieco dalej.
Przyjęto stosować zapis pochodnej tak:

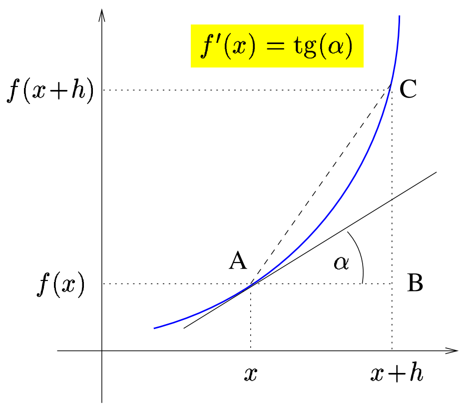
$$\frac{ds}{dt}, \quad \text{tak :} \quad \frac{ds(t)}{dt}, \quad \text{tak :} \quad \frac{d}{dt}s(t), \quad \text{lub tak :} \quad s'(t).$$

W szczególnym przypadku pochodną względem czasu t funkcji $f(t)$ przyjęto oznaczać kropką pisaną nad nazwą funkcji:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}.$$

Możemy prześledzić jeszcze raz pojęcie pochodnej dla dowolnej funkcji. Niekoniecznie musi to być droga przebyta w ruchu. Przekonamy się, że pochodna ma prostą graficzną interpretację.

Rozważmy odpowiednio gładką (podobnie jak na pierwszym rysunku w przypadku a) funkcję $f(x)$ zmiennej niezależnej x (1. Chcemy znaleźć pochodną tej funkcji w punkcie x, gdzie przyjmuje ona wartość $f(x)$. Rozpatrzmy drugi punkt oddalony od x o h, tam funkcja przyjmuje wartość $f(x+h)$. Jest to zobrazowane na poniższym rysunku.



Gdy wartość zmiennej x przyrasta o $\Delta x = h$ to odpowiedni przyrost funkcji wynosi $\Delta f = f(x+h) - f(x)$. Utwórzmy iloraz różnicowy, czyli iloraz przyrostu wartości funkcji f i przyrostu zmiennej x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jak z rysunku widać jest to stosunek boku BC do boku AB w trójkącie ABC, czyli tangens nachylenia siecznej AC do osi x. Pochodna jest granicą ilorazu różnicowego jaką uzyskamy przy zmniejszaniu przyrostu Δx do zera, czyli przy zbliżaniu punktu $x+h$ do punktu x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Sieczna AC staje się w tej granicy styczną do wykresu funkcji w punkcie x, bo punkt C wędruje po krzywej $f(x)$ do punktu A. Uzyskaliśmy w ten sposób prostą interpretacją geometryczną pochodnej:

pochodna funkcji $f(x)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie x

Należy zrobić jeszcze jedną uwagę dotyczącą istnienia pochodnej. Aby pochodna istniała konieczne jest: (1) aby funkcja była ciągła, (2) aby granica prawostronna (przy $h \to 0$ po wartościach dodatnich) i granica lewostronna (po wartościach h ujemnych) były sobie równe. Przykładowo, na pierwszym rysunku w przypadku b) widać, że w punkcie x_1 nie ma pochodnej, bo choć granice lewostronna i prawostronna istnieją, to nie są one równe.

[1] w matematyce funkcją gładką nazywamy funkcję ciągłą, której pochodna też jest ciągła

Przykład. Obliczanie pochodnej na podstawie definicji.

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$.
$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,
$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2x$,
$(x^2)' = 2x$.

Każdorazowe obliczanie pochodnej przy pomocy definicji jest wysoce niepraktyczne. Wygodniej zapamiętać kilka wzorów dotyczących funkcji elementarnych i pewne ogólne reguły różniczkowania.

1.3 Obliczanie pochodnych

1.3.1 Pochodne niektórych funcji elementarnych.

$(const)' = 0$
$(x^a)' = ax^{a-1}$
np.
$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(x^3)' = 3x^2$
$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = 1/x$
$(\sin x)') = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{arc\,ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

1.3.2 Pochodna funkcji odwrotnej.

Jeśli $x = g(y)$ jest funkcją odwrotną funkcji $y = f(x)$ to

$$g' = \frac{1}{f'}$$

Przykładowo, $x = \ln y$ jest funkcją odwrotną funkcji $y = e^x$.
$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$.

1.3.3 Pochodna sumy, iloczynu, ilorazu.

$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Przykłady:
$(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$,
$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}$.

1.3.4 Pochodna funkcji złożonej.

Niech $y = f(g(x))$, wtedy

$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$.

Przykładowo, funkcja $\sin(x^2+3)$ jest złożeniem funkcji sinus i wielomianu x^2+3. Popatrzmy na nią jak na funkcję zadaną dwoma relacjami:
$f = \sin g$,
$g = x^2+3$.
Obliczamy: pochodna funkcji zewnętrznej $\frac{df}{dg}$ daje $\cos g$, czyli $\cos(x^2+3)$, pochodna funkcji wewnętrznej $(x^2+3)'$ daje $2x$, a więc zgodnie z podanym wzorem:
$[\sin(x^2+3)]' = \cos(x^2+3) \cdot 2x$.

1.3.5 Pochodna funkcji wektorowej.

Funkcją wektorową będziemy nazywali wektor, którego składowymi są funkcje skalarne (często jednej zmiennej). Przykładowo, taką funkcją zależną od czasu jest wektor prędkości poruszającego się ciała $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$.
Zasady różniczkowania funkcji wektorowej jednej zmiennej $\vec{F}(t)$ (t – jest tu zmienną niezależną, względem której będziemy różniczkować) nie wymagają innych reguł, niż podane wyżej. Obliczamy po prostu pochodne składowych:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \left(\frac{dF_x}{dt}, \frac{dF_y}{dt}, \frac{dF_z}{dt}\right).$$

1.3.6 Druga pochodna i pochodne wyższych rzędów.

Druga pochodna jest to pochodna pierwszej
$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$.
Oznaczamy ją także tak: $\frac{d^2f}{dx^2}$.
Analogicznie określamy pochodną n-tego rzędu:
$f^{(n)}(x) = \frac{d\,f^{(n-1)}(x)}{dx}$.

1.3.7 Funkcja wielu zmiennych – pochodne cząstkowe.

Jeśli mamy funkcję wielu zmiennych, np. trzech, $f(x,y,z)$, to pochodną cząstkową względem określonej zmiennej, np. x, jest pochodna funkcji f względem tej zmiennej przy traktowaniu pozostałych zmiennych jak stałe. Taką pochodną oznaczamy

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}.$$

Pozostałe dwie pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y,z)$ to $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$.

2 Różniczka

2.1 Różniczka funkcji jednej zmiennej

Najprościej mówiąc, różniczka jest nieskończenie małym przyrostem danej wielkości (zmiennej, funkcji); przykładowo: drogi, czasu, ciśnienia, etc.

Najpierw pewna istotna uwaga. Zapis pochodnej funkcji w postaci

$$\frac{df(x)}{dx}$$

może być rozumiany dwojako:

1) Traktujemy go jako polecenie wykonania działania na funkcji $f(x)$ określonego regułami różniczkowania, co w zapisie wyraźniej wygląda tak:

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

Powyższa formuła mówi: weź operator różniczkowy $\frac{d}{dx}$ i podziałaj nim na funkcję $f(x)$ – otrzymasz wynik. Innymi słowy sprowadza się to do zastosowania odpowiedniego wzoru z poprzedniego rozdziału.

2) Zapis pochodnej podany na początku traktujemy jako iloraz dwóch nieskończenie małych wielkości

$$df \ : \ dx.$$

Jedna z tych wielkości to przyrost zmiennej niezależnej dx, a druga – odpowiadający mu przyrost funkcji df. Te wielkości nazywamy różniczkami (odpowiednio różniczką zmiennej niezależnej i różniczką funkcji).
Jeśli różniczki wystąpią w wyrażeniu algebraicznym lub w równaniu to możemy postępować z nimi jak ze zwykłymi liczbami (wyciągać przed nawias, mnożyć lub dzielić równanie przez nie, upraszczać, etc.). W szczególności przekształćmy równość

$$\frac{df}{dx} = f'(x),$$

mnożąc ją przez dx

$$\frac{df}{dx}dx = f'(x)dx,$$

i uprośćmy dx po lewej stronie. Otrzymamy

$$\boxed{df = f'(x)dx.}$$

Uzyskaliśmy przepis jak obliczyć różniczkę funkcji.
Przykład. Obliczenie różniczki funkcji $\sin^2 x$:
$d(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'dx = 2\sin x \cos x\, dx = \sin(2x)\, dx$.

2.2 Różniczka funkcji wielu zmiennych

Jeśli mamy funkcję n zmiennych $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ to różniczka tej funkcji df wyraża sie wzorem

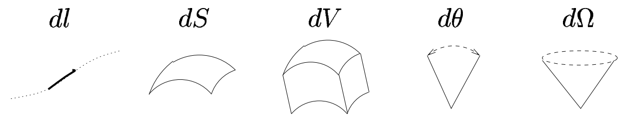
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n,$$

gdzie $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ są przyrostami poszczególnych zmiennych, zaś df jest całkowitym przyrostem funkcji f.
Przykładowo, dla funkcji która zależy tylko od położenia (czyli od współrzędnych x, y, z)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

2.3 Różniczkowe elementy długości, powierzchni, objętości i kątów

Wygodnie wprowadzić pojęcia takich tworów przestrzennych jak: elementarna długość krzywej, elementarny wycinek powierzchni, elementarna objętość, elementarny kąt płaski, elementarny kąt bryłowy. Będą to wielkości nieskończenie małe i wyrażać się będą przez różniczki (przyrosty) określonych zmiennych: długości (l), powierzchni (S), objętości (V), kąta płaskiego (θ), kąta bryłowego (Ω).



element długości krzywej | elementarna powierzchnia | elementarna objętość | element kąta płaskiego | element kąta bryłowego

W różnych układach współrzędnych (kartezjańskim, biegunowym, sferycznym, cylindrycznym etc.) będą się te elementy wyrażać w różny sposób. Na razie skupmy sie na układzie kartezjańskim, pozostałe układy omówione będą w innym tekście.
W prostokątnym układzie kartezjańskim elementem długości linii, która jest równoległa do jednej z osi, np. osi x, jest różniczka dx. Elementem dowolnej krzywej w przestrzeni trójwymiarowej jest przyrost wektora wodzącego $d\vec{r}$. Składowymi wektora $d\vec{r}$ są przyrosty różniczkowe (dx, dy, dz). Długość tego elementu (czyli element długości krzywej dl) wyraża się zwykłym wzorem z rachunku wektorowego $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.
Elementem powierzchni, np. równoległej do płaszczyzny (x, y), jest $dS = dxdy$ – iloczyn dwóch przyrostów tworzący prostokąt, leżący w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny x, y, o bokach $dx,\ dy$.
Iloczyn trzech wzajemnie prostopadłych przyrostów $dx,\ dy,\ dz$ jest elementem objętości $dV = dx\,dy\,dz$ (jest to prostopadłościan o bokach dx, dy, dz).

3 Zastosowania pochodnych

3.1 Reguła de l'Hospitala

Niekiedy spotykamy się z zagadnieniem obliczania granicy ilorazu dwóch funkcji

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Jeśli każda z nich dąży niezależnie do zera,

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0, \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

(tzw. symbol 0/0), lub do nieskończoności,

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty, \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$$

(symbol ∞/∞), to wówczas pomocna jest reguła de l'Hospitala:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Zakładamy, że pochodne obu funkcji w punkcie a istnieją.
Przykład:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

3.2 Szereg Taylora. Wzory przybliżone.

Znamy funkcję $f(x)$ (oraz jej pochodne) w jakimś punkcie x_o, a chcemy znaleźć jej wartość w innym punkcie $f(x_o+h)$, odległym o h od x_o. Korzystamy z rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora

$$f(x_o + h) = f(x_o) + \frac{h}{1!} f'(x_o) + \frac{h^2}{2!} f''(x_o) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_o) \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_o) + \cdots$$

Nieskończony ten szereg jest postępem geometrycznym ze względu na parametr h. Zauważmy, że jeśli $h \ll 1$ (czyli jesteśmy blisko punktu x_o) to szereg jest na ogół silnie zbieżny, tzn. kolejne wyrazy zawierające potęgi h^n stają się zaniedbywalnie małe w porównaniu do poprzedzających wyrazów. Zatem można w takim przypadku szereg "urwać" zaniedbując wyrazy wyższego rzędu, bez wielkiej szkody dla dokładności.
Dostaniemy wtedy wartość przybliżoną funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_o + h$. Ilość wyrazów jakie zachowujemy zależy od wymaganej dokładności przybliżenia, często wystarczają dwa wyrazy:

$$f(x_o + h) \approx f(x_o) + hf'(x_o),$$

ale jeśli potrzebna jest większa dokładność to zawsze możemy dołączyć kolejne, np.:

$$f(x_o + h) \approx f(x_o) + hf'(x_o) + \frac{h^2}{2} f''(x_o),$$

itd.
Przykład. Dla wyrażenia $\frac{1}{(1+h)^2}$ uzyskajmy uproszczony wzór dla małych h, tzn. załóżmy $h \ll 1$. Rozptrzmy w tym celu funkcję $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i rozwińmy ją w otoczeniu punktu $x = 1$. Zastosujmy najprostszy wariant, w którym w rozwinięciu Taylora zostawiamy tylko dwa pierwsze wyrazy. Dla $x_o = 1$ mamy $f(x_o) = \frac{1}{1^2} = 1$; $f'(x_o) = -\frac{2}{x^3}|_{x_o=1} = -2$. Wstawiając te wielkości do rozwinięcia, mamy

$$\frac{1}{(1+h)^2} \approx 1 - 2h.$$

Przykładowo: $\frac{1}{(1.014)^2)} = 0.9726$, stosując zaś uproszczony wzór dostajemy $1 - 0.028 = 0.9720$. Różnica na czwartym miejscu po przecinku!

Przykład. Przybliżona wartość $\sin(\alpha)$ dla małych kątów α. Dla tego przypadku punktem, względem którego będziemy rozwijać funkcję sinus jest kąt równy zero. Zapisujemy wartość $\sin(0+\alpha)$ (α jest tym małym parametrem oznaczanym wyżej przez h):

$$\sin(0+\alpha) = \sin(0)+\frac{\alpha}{1}\sin'(0)+\frac{\alpha^2}{2}\sin''(0)+\frac{\alpha^3}{6}\sin'''(0)+\cdots$$

Przy założeniu $\alpha \ll 1$ nietrudno stąd otrzymać wzory przybliżone. Jeśli weźmiemy tylko dwa pierwsze wyrazy szeregu i pominiemy pozostałe to uzyskamy wzór znany ze szkoły

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

Dokładniejszy wzór wygląda tak:

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3.$$

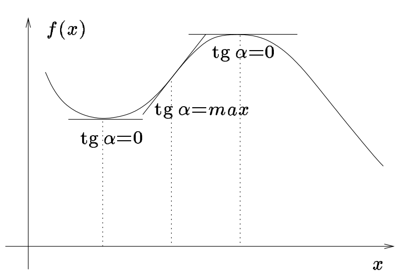
Aby go uzyskać musieliśmy rozpatrzyć cztery wyrazy rozwinięcia.
Sprawdź rachunkiem dla jakiego zakresu kątów poszczególne wzory dają wynik z dokładnością nie gorszą niż 1%.

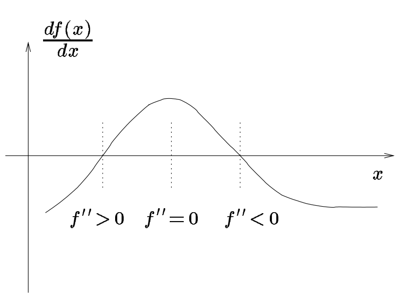
3.3 Ekstrema funkcji

Maksima i minima funkcji $f(x)$ można wyszukać znajdując miejsca zerowe pochodnej

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0.$$

Badając pochodną można też określać inne własności funkcji, jak np. punkty przegięcia. Najlepiej widać to na rysunku przedstawiającym wykres przykładowej funkcji $f(x)$ (górny rysunek) oraz wykres jej pochodnej (dolny rysunek).





Wykres pochodnej powstał z analizy wykresu funkcji $f(x)$ w następujący sposób. Pierwsza pochodna jest tangensem kąta nachylenia stycznej do wykresu, wobec czego poziome styczne wyznaczają miejsca zerowe pochodnej, przy czym o tym czy jest tam maksimum czy minimum – o tym decyduje znak drugiej pochodnej:

$$f''(x) < 0 \text{ – maksimum}, \qquad f''(x) > 0 \text{ – minimum}.$$

Maksymalne i minimalne nachylenia stycznej określają punkty przegięcia funkcji $f(x)$. Są to więc punkty, w których występują ekstrema pochodnej, czyli druga pochodna się zeruje.
Ujemne kąty nachylenia stycznej dają ujemne wartości pochodnej; dalej, jeśli nachylenie stycznej wzrasta – pochodna jest rosnąca, i odwrotnie – zmniejszanie nachylenia określa obszary gdzie $f'(x)$ maleje.

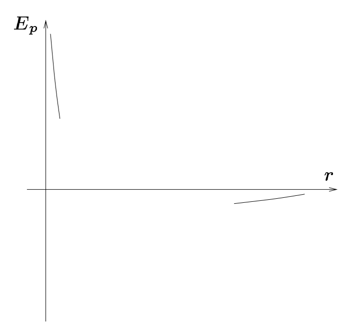
3.4 Wskazówki do sporządzania wykresów funkcji

Często warto pokazać na rysunku jak zmienia sie dana wielkość – innymi słowy należy umieć naszkicować wykres funkcji zadanej wzorem. Pochodna pokaże nam położenie ekstremów i punktów przegięcia, jeśli takowe będą.

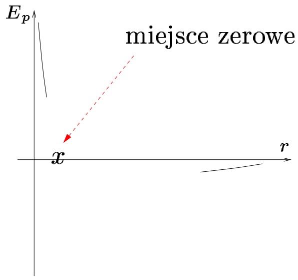
Dla przykładu przeanalizujmy jak wygląda na wykresie zależność energii potencjalnej układu dwóch cząstek odległych od siebie o r, która to zależność wyraża się wzorem

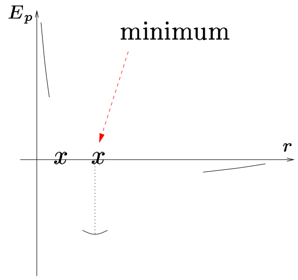
$$E_p(r) = \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4},$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi.
1. Rysujemy osie wykresu r i E_p. Ponieważ $r > 0$ wykres będzie się mieścił w I i IV ćwiartce.
2. Sprawdzamy jakie są wartości funkcji E_p dla $r = 0$ i $r = +\infty$ (krańce przedziału zmienności r):
gdy $r \to 0^+$ to $E_p = \frac{a-br^2}{r^6} \approx \frac{a}{r^6} \to +\infty$,
gdy $r \to +\infty$ wtedy $E_p \approx \frac{-br^2}{r^6} \to 0^-$.
Możemy już narysować początek wykresu:



3. Szukamy miejsc zerowych: $\frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4} = 0 \;\; \to \;\; r = \sqrt{a/b}$ (drugi pierwiastek odrzucamy bo $r > 0$).
4. Sprawdzamy ekstrema: $E_p' = -\frac{6a}{r^7} + \frac{4b}{r^5} = 0 \;\; \to \;\; r = \sqrt{3a/2b}$. Jest to minimum (sprawdź, że w tym punkcie $E_p'' > 0$).





5. Można też określić położenie punktu przegięcia z warunku $E_p'' = 0$ ale i bez tego łatwo już można naszkicować cały przebieg funkcji: