WSTĘP DO TEORII LICZB – ZADANIA

Zestaw nr.9: Kongruencje, podzielność – różne problemy; przedstawianie liczby jako sumy dwóch kwadratów

Zad.1 Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi związek: $n^{13} \equiv n \pmod{2730}$.

Zad.2 Liczby naturalne $n+1$ i $2n+1$ są kwadratami liczb naturalnych. Pokaż, że $24 \mid n$.

Zad.3 Niech x i y będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Udowodnij, że każdy naturalny dzielnik liczby x^2+y^2 można zapisać w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych.

Zad.4 Pokaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą to zachodzi kongruencja:

$$2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wsk. Zastosuj twierdzenie Wilsona.

Zad.5 Posługując się rachunkiem kongruencji wykaż, że równania diofantyczne nie posiadają rozwiązań:

a) $x^3+7=y^2$

b) $x^2+37=y^{11}$

c) $x^3-9=y^2$

d) $x^2-71=y^7$.

Wskazówka: rozważ różne scenariusze (nie)parzystości x i y. Mamy twierdzenie: jeżeli liczba może być przedstawiona jako suma kwadratów (dwóch!) to jej nieparzysty dzielnik pierwszy może mieć postać $4k+1$, a nie może mieć postaci $4k+3$.

Zad.6 Pokaż, że dla każdego n liczba $3^{6n}-2^{6n}$ jest podzielna przez 35.

Zad.7 Znajdź wszystkie $n>1$, dla których zachodzi $(n-1)!+1=n^2$.

Wsk. Tylko dla $n=5$ (sprawdź). Dla $n=2,3,4$ ta równość nie zachodzi , a dla $n=6$ mamy $n^2>6n-4$ i podobnie dla $n>6$ (indukcja – sprawdź). Stąd ...

Zad.8 Udowodnij twierdzenie Liouville'a: równanie

$$(p-1)!+1=p^m$$

nie ma rozwiązania dla $p>5$ i dla $m>0$.

Wsk.: dowód metodą nie wprost. Dla $p>5$ mamy $2<\frac{p-1}{2}<p-1$ a także

$$(p-1)^2 = 2\frac{p-1}{2}(p-1) \mid (p-1)!$$

gdyby zachodziła teza, to mielibyśmy ...

Zad.9 Euler (1739) wykazał, ze $F_5 = 2^{32}+1 = 641 \cdot 6\,700\,417$. Przy okazji udowodnił, że każdy ewentualny dzielnik pierwszy (!) liczby Fermata F_t musi mieć postać $p=2^{t+2}k+1;\ k\in\mathbb{N}$.

Wykaż to i Ty. (zadanie trudnawe, ale można go znaleźć praktycznie wszędzie).

(n.b. Jest to zresztą szczególny przypadek nieco szerszego twierdzenia: Jeżeli a jest naturalną liczbą parzystą, $n\in\mathbb{N}$ a p liczbą pierwszą
i zachodzi $p \mid a^{2^n}+1$ to $p=2^{n+1}k+1$, $k\in\mathbb{N}$.)

Zad.10 Udowodnij twierdzenie: jeżeli $n>1$, $n\in\mathbb{N}$, to liczba Mersenne'a M_n nie może mieć postaci $M_n=k^m$, gdzie $m>1$, $m\in\mathbb{N}$.