WSTĘP DO TEORII LICZB – ZADANIA

Współczynniki dwumianowe

Zad.0 Udowodnij, używając argumentów kombinatorycznych, *tożsamość Cauchy'ego*

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Suma iloczynów współczynników dwumianowych o stałych górnych wskaźnikach i stałej sumie dolnych wskaźników jest współczynnikiem dwumianowym, jaki otrzymujemy przez zsumowanie obu górnych i obu dolnych wskaźników.

Zad.1 Udowodnij

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

Zad.2 Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=m}^{n} 2^k \binom{k}{m}\binom{n}{k} = 2^m 3^{n-m}\binom{n}{m}, \qquad m < n.$$

Zad.3 Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k 2^{n-k} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n}{m}, \qquad m < n.$$

Zad.4 W oparciu o (wykaż!)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{nx-n-1}{(x-1)^2}x^n \qquad \text{oraz}\\ \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} &= \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{n(1-x)^2+2(1-x)(nx-n-1)}{(x-1)^4}x^n + \frac{n(nx-n-1)}{(x-1)^2}x^{n-1}\end{aligned}$$

wykaż, że dla $|x| < 1$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

Zad.5 Wykaż

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{l+k-1}{l} = \binom{l+n}{l+1}.$$

Zad.6 Równość z zadania 4 zastosuj do wyprowadzenia, a raczej „udokumentowania" (na konkretnych wartościach liczbowych" wzorów

$$\sum_{k\leqslant n} \binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \ldots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}, \tag{1}$$

(suma współczynników dwumianowych, których górne i dolne wskaźniki pozostają „w stałej odległości od siebie") oraz

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{m}=\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\ldots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1},\qquad m,n>0. \tag{2}$$

(Tutaj mamy sumę współczynników o stałym dolnym wskaźniku.)

Zad.7 Wyprowadź wzór (1) z wzoru (2).